Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского

Серия «Экономика и управление». Том 27 (66). 2014 г. № 4. С. 91-95.

УДК:330.131.7

К НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДУОПОЛИИ ПО КУРНО

Королев О.Л.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым
E-mail: alekking@gmail.com

В статье рассматриваются вопросы применимости теории игр для решения экономических задач. В частности, рассмотрен класс непрерывных игр на примере линейной модели дуополии Курно. Рассматриваются методы поиска равновесного решения дуополии Курно. Рассматриваются вопросы возможности перехода к нелинейной модели дуополии Курно как более адекватному представлению реальной ситуации.
Ключевые слова: теория игр, непрерывные игры в экономике, дуополия Курно.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее внимание уделяется вопросам применения теории игр для решения задач управления в целом, и оптимального управления в частности. В настоящее время активно исследуется теория игр и ее экономические приложения таким учеными как Витлинский В.В. [1], Дебро Г. [2] Сигал А.В. [3]. Существует класс задач теории игр, относящихся к непрерывным играм. Исследованием и разработкой этого класса задач занимались и занимаются такие отечественные и зарубежные ученые как Зенкевич Н.А., Петросян Л.А., Янг Д.В.К. [4], Жуковский В. И. [5, 6], Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. [6], Жаркынбаев С. Ж., Высокос М. И. [7]. **Актуальность** данного направления исследований определяется актуальностью задачи поиска путей применения математического аппарата для решения задач экономики. Для достижения новых результатов необходимо решить **проблему** переосмысления и переоценки уже достигнутых результатов, определить границы их применения и пути дальнейшего развития.

Целью работы является исследовать возможности применения теории игр для решения таких задач экономики как поведение фирмы в условиях конкуренции. В частности, рассматривается задача дуополии Курно.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

(«Линейная модель дуополии Курно»). Предположим, что две фирмы F_i, $i = 1, 2$, производят однородный продукт и конкурируют на одном и том же рынке. Пусть неубывающая функция затрат фирмы F_i известна обоим участникам и имеет вид: $C_i(q_i)$, где $q_i \geq 0$ — объем выпуска товара данной фирмы.

Пусть при этом рынок характеризуется функцией спроса $q = D(p)$, $p \geq 0$, которая является убывающей функцией цены p. Будем предполагать, что для функции спроса существует обратная функция: $p = D^{-1}(q) \equiv P(q), q \geq 0, q = q_1 + q_2$, которую здесь будем называть функцией цены.

Будем предполагать, что объемы выпуска (в данном примере объем выпуска и есть стратегия игрока) $q_i \geq 0$ обе фирмы выбирают одновременно и независимо друг от друга, причем таким образом, чтобы максимизировать прибыль от реализации своей продукции. В таком случае функция прибыли фирмы i может быть записана в виде

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i P(q_i + q_j) - C_i(q_i).$$

Игра двух лиц вида , где $Q = \{q | q \geq 0\}$, называется дуополией по Курно.

Известно, что если стратегия игрока входит в ситуацию равновесия, то на ней достигается максимум его функция выигрыша, при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий, входящих в ситуацию равновесия.

Рассмотрим игру $\Gamma = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ в нормальной форме. Обозначим через

$BR_i(x_{-i})$ — множество наилучших ответов игрока i на поведение дополнительной коалиции x_{-i}:

$$BR_i(x_{-i}) = \left\{x_i \middle| K_i(x_i, x_{-i}) = \max_{y_i} K_i(y_i, x_{-i})\right\} \equiv \arg\max_{y_i} K_i(y_i, x_{-i}) \quad (1)$$

Множество наилучших ответов этого игрока содержат все стратегии этого игрока, на которых достигается максимум его функции выигрыша, при условии, что ему известна стратегия дополнительной коалиции.

Определим следующую теорему.

Теорема 1. Ситуация $x_N^* \in X_N$ образует ситуацию равновесия в игре $\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i=1}^n, \{K_i\}_{i=1}^n \rangle$ тогда и только тогда, когда включение $x_i^* \in BR_i(x_{-i}^*)$ имеет место для каждого игрока i.

Данный результат может быть использован для нахождения равновесия по Нэшу, по крайней мере в классе конечных игр, при условии, что само равновесие существует.

Нахождение ситуации равновесия по Нэшу в классе непрерывных игр представляет собой непростую вычислительную задачу. Однако если для каждого игрока i функция выигрыша $K_i(x_i, x_{-i})$ является вогнутой по переменной x_i на выпуклом компактном множестве X_i, то в непрерывной игре множество $BR_i(x_{-i})$ не пусто для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ и $i \in N$.

Рассмотрим следующую теорему [2].

Теорема 2. Если в непрерывной игре Г множества стратегий всех игроков непустые, выпуклые и компактные, а функция выигрыша каждого игрока квазивогнута (в частности, вогнута) на множестве стратегий этого игрока, то в игре существует ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях.

В силу теоремы 2 равновесие в чистых стратегиях существует. Поэтому для нахождения равновесия по Нэшу можно воспользоваться теоремой 1. Проблема нахождения равновесия становится технической и заключается в построении множества $BR_i(x_{-i})$ наилучших ответов, что на практике может составить сложную вычислительную задачу.

Сделаем дополнительное предположение о том, что множества $BR_i(x_{-i})$ являются одноэлементными для всех $x_{-i} \in X_{-i}$ и $i \in N$, т.е. $BR_i(x_{-i})$ содержит единственный элемент, который обозначим $R_i(x_{-i})$. В этом случае условие (1) можно переписать в виде

$$x_i = R_i(x_{-i}) \text{ при } x_{-i} \in X_{-i},$$

(2)

где $K_i(R(x_{-i}), x_{-i}) = \min\limits_{y_i \in X_i} K_i(y_i, x_{-i})$. Тем самым, каждому $x_{-i} \in X_{-i}$ ставится в соответствие определенная стратегия x_i. Это означает, что на множестве всех возможных $x_{-i} \in X_{-i}$ задана некоторая функция. Ее называют функцией реакции игрока i.

Для существования функции реакции $x_i = R_i(x_{-i})$ достаточно, например, предположить, чтобы функции $K_i(x_i, x_{-i})$ были строго вогнутыми по переменной x_i на выпуклом множестве X_i для всякого игрока i. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 3. Если в непрерывной игре Г множество стратегий X_i всех игроков i непустые, выпуклые и компактные, а функция выигрыша $K_i(x_i, x_{-i})$ каждого игрока i строго вогнута на множестве стратегий этого игрока, то в такой игре существуют функции реакции $x_i = R_i(x_{-i})$ для каждого игрока i и равновесие по Нэшу. Ситуация $x_N^* = (x_i^*, x_{-i}^*) \in X_N$ образует ситуацию равновесия по Нэшу в игре Г тогда и только тогда, когда $x_i^* = R_i(x_{-i}^*)$ для всех $i \in N$.

Таким образом, проблема нахождения равновесия сводится к построению функций реакции для каждого из игроков. В условиях дифференцируемости функции выигрыша игроков решение указанной проблемы в некоторых случаях сводится к решению определенной системы уравнений.

В самом деле, обозначим частную производную функции выигрыша произвольного игрока i по переменной x_i через $K_i^i(x_i, x_{-i}) \equiv \dfrac{\partial K_i(x_i, x_{-i})}{\partial x_i}$. Аналогично, для частной производной второго порядка примем обозначение $K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) \equiv \dfrac{\partial^2 K_i(x_i, x_{-i})}{\partial^2 x_i}$. Известно, что если функция $K_i(x_i, x_{-i})$ достигает наибольшего значения по переменной x_i во внутренней точке, то выполняется необходимое условия экстремума первого порядка:

$$K_i^i(x_i, x_{-i}) = 0 \text{ для всех } i \in N.$$

(3)

Если при этом функция $K_i(x_i, x_{-i})$ оказывается вогнутой по x_i, то условие (3) является достаточным и для равновесия по Нэшу.

В случае, когда функция выигрыша $K_i(x_i, x_{-i})$ дважды дифференцируема по x_i, условие вогнутости по x_i (в терминах частных производных второго порядка) имеет вид:

$$K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) \leq 0 \text{ для всех } x_{-i} \in X_{-i}, i \in N.$$

(4)

Решая (3) можно найти равновесия по Нэшу. Если же функция $K_i(x_i, x_{-i})$ является строго вогнутой по переменной x_i, то уравнение (3) неявно задает функцию реакции:

$$x_i = R_i(x_{-i}), x_{-i} \in X_{-i}.$$

Когда функция $K_i(x_i, x_{-i})$ дважды дифференцируема по x_i, условие строгой вогнутости по x_i (необходимое условие экстремума второго порядка) может быть записано в виде

$$K_i^{ii}(x_i, x_{-i}) < 0 \text{ для всех } x_{-i} \in X_{-i}, i \in N \quad (5)$$

В некоторых простых случаях данная техника позволяет находить равновесия по Нэшу в непрерывной игре.

Пример. Наложим дополнительное ограничение по линейности функции спроса и функции затрат на линейную модель дуополии Курно. Иногда в экономической литературе равновесие по Нэшу в модели Курно называют равновесием по Курно.

Предположим, что обратная функция спроса (функция цены) имеет вид $P(q) = a - q$. Пусть функции затрат также линейны по объемам выпуска, а именно $C_i(q_i) = c_i q_i$. Тогда функции прибыли примут вид:

$$\Pi_i(q_i, q_j) = q_i(a - q_i - q_j) - c_i q_i, q_i \geq 0 .$$

Заметим, что функция прибыли фирмы i строго вогнуты по объемам выпуска q_i этой фирмы, поэтому условия первого порядка являются необходимыми и достаточными для равновесия по Нэшу.

Выпишем необходимое условие экстремума первого порядка для функции $\Pi_i(q_i, q_j)$:

$$q_j + 2q_i + c_i - a = 0 \quad (6)$$

Отсюда, в частности, получаем функции реакции конкурирующих фирм:

$$q_i = R_i(q_j) = \frac{a - q_j - c_i}{2}.$$

Решая систему уравнений (6), получаем равновесие по Нэшу (равновесие по Курно):

$$q_i^* = \frac{a - 2c_i + c_j}{3}$$

причем прибыль в равновесии при соответствующей подстановке составит величину

$$\Pi_i^* = \frac{(a - 2c_i + c_j)^2}{9} > 0.$$

ВЫВОДЫ

В результате проведенного исследования можно сделать вывод об адекватности применения аппарата теории игр для решения экономических задач. Так, было показано, что непрерывные игры могут быть применены, в частности, для решения модели Курно в линейной форме. Заметим, что в равновесии Курно каждая фирма имеет положительную прибыль. Равновесный выпуск фирмы убывает с увеличением ее предельных затрат. При этом равновесный выпуск фирмы в модели Курно возрастает с ростом предельных издержек фирмы-конкурента. Это происходит из-за того, что более высокие затраты конкурента заставляют его снижать объем производства, что в свою очередь увеличивает остаточный спрос на продукцию фирмы, побуждая ее увеличивать объем производства.

Рассмотренная линейная модель дуополии Курно и решение соответствующей игры позволяют сделать вывод о необходимости модификации модели с учетом нелинейности. Дальнейшие направления исследования должны быть направлены на формулирование нелинейной модификации модели Курно, а также найдено ее решение с помощью аппарата теории игр.

Список литературы

1. Вітлінський В.В. Застосування теорії ігор у системі прийняття кредитних рішень з урахуванням ризику / В. В. Вітлінський, А. В. Сігал // Моделювання та інформаційні системи в економіці . зб. наук. пр. — № 87. — К. : КНЕУ, 2012. — С. 33-59.
2. Debreu G. A Social Equilibrium Existence Theorem / G. Debreu // Proceedings of National Academy of Science, 38, 1952. – pp. 886-893. Перевод на русский язык опубликован в сб.: Бесконечные антагонистические игры. Под ред. Н.Н. Воробьева. – М.: Физматгиз, 1963.
3. Сигал А.В. Теория игр для принятия решений в экономике: монография / А.В. Сигал. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. – 308 с.
4. Зенкевич Н.А. Динамические игры и их приложения в менеджменте: учебное пособие / Н.А. Зенкевич, Л.А. Петросян, Д.В.К. Янг. – СПб: Изд-во «Высшая школа менеджмента», 2009. – 415 с.
5. Жуковский В. И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. Равновесие угроз и контругроз / В. И. Жуковский. — Изд. 2-е, испр. и доп. — М. : КРАСАНД, 2010. — 192 с.
6. Жуковский В. И. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев, Л. В. Смирнова. — М. : КРАСАНД, 2013. — 368 с.
7. Жуковский В. И. К теории дуополии Курно / В. И. Жуковский, М. И. Высокос, С. Ж. Жаркынбаев // Анализ, моделирование, управление, развитие экономических систем (АМУР-2013) : сб. научных трудов VII Междунар. школы-симпозиума АМУР-2013 (Севастополь, 12-21 сентября 2013). — Симферополь : ТНУ, 2013. — С. 155-159.

Статья поступила в редакцию 11. 11. 2014 г.