Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского

Серия «Экономика и управление». Том 27 (66). 2014 г. № 4. С. 159-168.

УДК:330.131.7

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ УРОВНЯ РИСКА ПОРТФЕЛЕЙ, ДОПУСТИМЫХ В МОДЕЛИ БЛЭКА

Сигал А.В., Козловская Е.В.

Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Республика Крым
E-mail: ksavo3@gmail.com

В статье предлагается теоретико-игровой метод принятия управленческих решений об оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Блэка. Особое внимание уделяется вопросам условий, соблюдение которых позволяет найти портфель оптимальной структуры на основе решения соответствующей антагонистической игры. Найдено решение конкретной задачи.
Ключевые слова: теоретико-игровой метод, оптимизация уровня риска портфеля, портфели, допустимые в модели Блэка, антагонистическая игра.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретико-игровые модели нашли широкое применение для решения задач оптимального распределения имеющихся ресурсов между разными активами. С экономической точки зрения, распределение ресурсов является диверсификацией деятельности. Научной основой диверсификации является современная теория портфеля, начавшаяся в 50-е годы прошлого века с работ [1, 2] американского экономиста Гарри Макса Марковица. Различные теоретические и практические аспекты применения антагонистических игр (АИ), точнее матричных игр, т.е. игр двух лиц с нулевой суммой, в теории портфеля были рассмотрены, например, в работах [3-7]. В этих работах, в частности, уделялось внимание вопросам обоснования корректности поиска структуры эффективного (оптимального по Парето) портфеля на основе решения соответствующей АИ. В частности, в работе [4, с. 33-45] приведена классическая модель Марковица в поле первой информационной ситуации, когда известно распределение вероятностей состояний экономической среды, а также приведены модели задачи выбора портфеля оптимальной структуры в поле, так называемых, четвертой и пятой информационных ситуаций, когда неизвестно распределение вероятностей состояний экономической среды. В рамках этих моделей задачи выбора портфеля оптимальной структуры в поле первой, четвертой и пятой информационных ситуаций была обоснована возможность и корректность теоретико-игрового метода оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Марковица.

При теоретико-игровом моделировании задачи выбора структуры оптимального портфеля в поле разных информационных ситуаций структура эффективного портфеля может быть найдена на основании решения АИ, заданной матрицей, элементами которой являются, например, наблюдавшиеся в прошлые периоды времени, значения норм прибыли выбранных активов. В этом случае значения компонент оптимальной стратегии первого игрока можно интерпретировать как значения долей, в которых инвестору следует распределить имеющиеся средства между соответствующими активами. А при выполнении определенных требований оптимальная смешанная стратегия первого игрока задает структуру эффективного портфеля, а именно, портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска, оцененного дисперсией нормы прибыли портфеля (портфель, обладающий наименьшим уровнем риска, всегда является эффективным портфелем). В частности, этот подход возможен, если все чистые стратегии второго игрока являются его активными стратегиями.

К моделям, получившим наибольшее распространение и используемым для формирования портфеля оптимальной структуры, относят следующие две модели: модель Марковица и модель Блэка. В модели Марковица допустимыми являются только стандартные портфели, т.е. портфели без коротких позиций, когда инвестор по каждому активу находится в длинной позиции. Длинная позиция — это покупка актива с намерением его последующей продажи (закрытие позиции). Разумеется, такое поведение инвестора обусловлено его ожиданием повышения цены актива в надежде получить доход от разности цен покупки и продажи. Из-за недопустимости коротких позиций в модели Марковица значения долей активов могут быть только неотрицательными числами и, как следствие, не большими 1. Поэтому особенностью этой модели является ограниченность норм прибыли допустимых портфелей, т.к. значение нормы прибыли любого стандартного портфеля не может превышать наибольшего значения норм прибыли активов, из которых состоит рассматриваемый портфель.

Модель Блэка аналогична модели Марковица, но, в отличие от последней, в ней отсутствует условие неотрицательности значений долей активов в допустимых портфелях. Это означает, что инвестор имеет право осуществлять короткие продажи, т.е. продавать активы, предоставленные ему в заем. В этом случае инвестор рассчитывает на снижение цены актива и поэтому планирует возвратить заем этим же активом, но приобретенным по более низкой цене. Вследствие отсутствия ограничений на значения долей активов в портфелях, допустимых в модели Блэка, теоретически значение нормы прибыли портфеля не ограничена.

Целью статьи является разработка теоретико-игрового метода оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Блэка, а также обоснование в этом случае корректности поиска структуры эффективного (оптимального по Парето) портфеля на основе решения соответствующей АИ.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА

Антагонистической игрой (АИ) будем называть конечную игру двух лиц с нулевой суммой, заданную своей платежной матрицей. АИ обычно называют матричными играми, т.к. платежная матрица АИ определяет саму игру: если задана платежная матрица АИ, т.е. матрица выигрышей первого игрока, то заданы и все компоненты, составляющие эту АИ.

Рассмотрим задачу выбора портфеля оптимальной структуры. Введем обозначения: k — количество активов, образующих портфель, x_i — доля актива i-го вида в портфеле, $\mathbf{x} = \left(x_1; x_2; \ldots; x_i; \ldots; x_k \right)$ — вектор, характеризующий структуру портфеля, R_i — дискретная случайная величина (ДСВ), характеризующая норму прибыли актива i-го вида, r_{ij} — j-е возможное значение ДСВ R_i, т.е. значение нормы прибыли (в процентах) актива i-го вида в условиях, когда экономическая среда (фондовый рынок) оказалась в своем j-м возможном состоянии, $R_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i$ — ДСВ, характеризующая норму прибыли портфеля $\mathbf{x}$, $m_i = \mathrm{M}(R_i)$ и $m_{\mathbf{x}} = \mathrm{M}(R_{\mathbf{x}})$ — ожидаемые нормы прибыли актива i-го вида и портфеля $\mathbf{x}$, $\sigma_i^2 = \mathrm{D}(R_i)$, $\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \mathrm{D}(R_{\mathbf{x}})$ — дисперсии соответствующих ДСВ, $c_{ij} = \mathrm{cov}(R_i; R_j)$ — коэффициент парной ковариации между соответствующими ДСВ, $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{k \times k} = (c_{ij})$ — ковариационная матрица.

Согласно современной теории портфеля Г. Марковица *модель задачи выбора портфеля оптимальной структуры* представляет собой задачу двухкритериальной оптимизации:

$$m_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot x_i \to \max_{\mathbf{x}}, \tag{1}$$

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij} \cdot x_i \cdot x_j \to \min_{\mathbf{x}}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1, \tag{3}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1, k}. \tag{4}$$

Эффективным портфелем в модели Марковица (или *эффективным портфелем*) называют портфель, структуру которого характеризует вектор, являющийся оптимальным по Парето решением задачи (1)-(4), а *эффективным портфелем в модели Блэка* называют портфель, структуру которого характеризует вектор, являющийся оптимальным по Парето решением задачи (1)-(3).

Как правило, задача многокритериальной оптимизации имеет не одно единственное оптимальное по Парето решение, а некоторое множество таких решений. Аналогично и задача выбора портфеля оптимальной структуры имеет, как правило, некоторое множество эффективных портфелей. Тем не менее, множество эффективных портфелей содержит лишь малую часть всех допустимых портфелей. Кроме того, принимая решение, инвестор формирует так называемый оптимальный портфель, т.е. такой эффективный портфель, для которого сочетание значений критериев задачи (1)-(4) с точки зрения инвестора является наилучшим.

Для того чтобы найти структуру $\mathbf{x}^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_i^*; \ldots; x_k^*)$ портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска в модели Марковица, необходимо решить задачу однокритериальной оптимизации (2)-(4), а для того, чтобы найти структуру $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*; x_2^*;...; x_i^*;...; x_k^*\right)$ портфеля, обладающего наименьшим уровнем экономического риска в модели Блэка, — задачу однокритериальной оптимизации (2)-(3). Портфель, обладающий наименьшим уровнем риска, всегда является эффективным портфелем для соответствующей модели.

Инвестор стремится формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем экономического риска, в случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать. К таким случаям можно отнести, например, наличие 1) кризиса, 2) предкризисной ситуации, 3) существенной несклонности инвестора к риску и т.п.

Возможность и корректность одного из теоретико-игровых методов решения задачи выбора структуры оптимального портфеля обосновывает следующее утверждение [5, с. 373].

Теорема 1. Пусть в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k\times n} = \left(r_{i\,j}\right)$, где $r_{i\,j}$ — j-е возможное значение ДСВ R_i, т.е. значение нормы прибыли (в процентах) актива i-го вида в условиях, когда экономическая среда (фондовый рынок) оказалась в своем j-м возможном состоянии, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е. оптимальную стратегию $\mathbf{q}^* = \left(q_1^*; q_2^*;...; q_j^*;...; q_n^*\right)$, для которой $q_j^* > 0$, $j = \overline{1, n}$. Тогда оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = \left(p_1^*; p_2^*;...; p_i^*;...; p_k^*\right)$ первого игрока задает структуру эффективного портфеля, а именно, портфеля $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$, обладающего наименьшим уровнем риска, как в модели Марковица, так и в модели Блэка.

При соблюдении всех требований теоремы 1 вектор $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*$ задает структуру, так называемого, портфеля без риска. Действительно, если в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k\times n} = \left(r_{i\,j}\right)$, второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то справедливо равенство $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot p_i^* \equiv V_{\mathbf{R}}^* = \text{const}$, откуда следует, что в условиях теоремы 1 $\min_{\mathbf{x}} \sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sigma_{\mathbf{x}}^{*2} = \mathrm{D}\left(R_{\mathbf{x}}^*\right) = \mathrm{D}\left(V_{\mathbf{R}}^*\right) = \mathrm{D}(\text{const}) = 0$, где $V_{\mathbf{R}}^*$ — значение (цена) АИ, заданной матрицей $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k\times n} = \left(r_{i\,j}\right)$, $\sigma_{\mathbf{x}}^{*2}$ — дисперсия случайной величины $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i^*$, характеризующей портфель, обладающий наименьшим уровнем риска.

Итак, если $q_j^* > 0$, $j = \overline{1, n}$, то дисперсия случайной величины $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i^*$, характеризующей норму прибыли портфеля со структурой $\mathbf{p}^* = \left(p_1^*; p_2^*;...; p_i^*;...; p_k^*\right)$, равняется числу 0. Поэтому значение уровня риска портфеля не может быть улучшено за счет изменения его структуры, а портфель со структурой $\mathbf{p}^* = \left(p_1^*;\, p_2^*; ...;\, p_i^*; ...;\, p_k^*\right)$, действительно является эффективным портфелем, а именно, портфелем, обладающим наименьшим уровнем риска, оцененного дисперсией нормы прибыли портфеля. Отметим, что именно теорема 1 позволяет обобщить задачу (1)-(4) на случаи, когда неизвестно распределение вероятностей состояний экономической среды.

При соблюдении всех требований теоремы 1 решение задачи (2)-(3) удовлетворяет требованиям (4) неотрицательности всех переменных, при этом решение задачи (2)-(3) совпадает с решением задачи (2)-(4). Однако, как известно, в общем случае решение задачи (2)-(3) не всегда совпадает с решением задачи (2)-(4). В таких случаях решение задачи (2)-(3) не удовлетворяет требованиям (4) неотрицательности всех переменных, а для решения задачи (2)-(3) теоретико-игровой метод оптимизации уровня риска портфеля следует уточнить. Например, можно поступить следующим образом.

Сначала от исходной матрицы $\mathbf{R} = \mathbf{R}_{k\times n} = \left(r_{i\,j}\right)$ следует перейти к матрице $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2\cdot k)\times n} = \left(r'_{i\,j}\right)$, в которой для элементов, расположенных в нечетных строках, выполняются равенства $r'_{2\cdot i-1\,j} = r_{i\,j}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$, а для элементов, расположенных в четных строках, выполняются равенства $r'_{2\cdot i\,j} = -r_{i\,j}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$. Возможность теоретико-игрового метода решения задачи (2)-(3), т.е. теоретико-игрового метода оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Блэка, обосновывает следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2\cdot k)\times n} = \left(r'_{i\,j}\right)$, где $r'_{2\cdot i-1\,j} = r_{i\,j}$, $r'_{2\cdot i\,j} = -r_{i\,j}$, $r_{i\,j}$ — j-е возможное значение ДСВ R_i, т.е. значение нормы прибыли (в процентах) актива i-го вида в условиях, когда экономическая среда (фондовый рынок) оказалась в своем j-м возможном состоянии, отсутствует седловая точка, а второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, т.е. оптимальную стратегию $\mathbf{q}^* = \left(q_1^*;\, q_2^*; ...;\, q_j^*; ...;\, q_n^*\right)$, для которой $q_j^* > 0$, $j = \overline{1,n}$. Тогда оптимальная стратегия $\mathbf{p}^* = \left(p_1^*;\, p_2^*; ...;\, p_i^*; ...;\, p_{2\cdot k}^*\right)$ первого игрока позволяет найти структуру эффективного портфеля, а именно, портфеля $\mathbf{x}^* = \left(x_1^*;\, x_2^*; ...;\, x_i^*; ...;\, x_k^*\right)$, где $x_i^* = \dfrac{p_{2\cdot i-1}^* - p_{2\cdot i}^*}{\sum\limits_{l=1}^{k}\left(p_{2\cdot l-1}^* - p_{2\cdot l}^*\right)}$, $i = \overline{1,k}$, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка.

Как и в случае теоремы 1, при соблюдении всех требований теоремы 2 вектор $\mathbf{x}^*$, построенный согласно приведенной в теореме формуле, задает структуру портфеля без риска: если в АИ, заданной матрицей $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{(2\cdot k)\times n} = \left(r'_{i\,j}\right)$, второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию, то справедливо равенство

$R^*_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x^*_i \equiv \text{const}$, где $x^*_i = \dfrac{p^*_{2\cdot i-1} - p^*_{2\cdot i}}{\sum_{l=1}^{k}\left(p^*_{2\cdot l-1} - p^*_{2\cdot l}\right)}$, $i = \overline{1,k}$. Это означает, что в условиях теоремы 2 справедливо равенство $\min\limits_{\mathbf{x}} \sigma^2_{\mathbf{x}} = \sigma^{*2}_{\mathbf{x}} = \mathrm{D}\left(R^*_{\mathbf{x}}\right) = \mathrm{D}(\text{const}) = 0$, где $\sigma^{*2}_{\mathbf{x}}$ — дисперсия случайной величины $R^*_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x^*_i$, характеризующей портфель, обладающий наименьшим уровнем риска.

В большинстве случаев, если возможно корректное применение теоретико-игрового метода выбора структуры оптимального портфеля, то удается найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска. Это обусловлено особенностями теории АИ. В первую очередь тем, что решение АИ ориентирует лицо, принимающее решения, на предельно осторожное поведение.

Рассмотрим конкретный пример теоретико-игрового метода оптимизации уровня риска портфелей, допустимых в модели Блэка. Пусть ситуация принятия решений (т.е. ситуация формирования портфеля оптимальной структуры) характеризуется следующей информацией:

1. известно множество $\boldsymbol{I} = \{1;\, 2;\, 3\}$ всех чистых стратегий первого игрока, т.е. множество активов $k = 3$ видов;
2. известно множество $\boldsymbol{J} = \{1;\, 2;\, 3\}$ всех чистых стратегий второго игрока, т.е. множество $n = 3$ возможных состояний экономической среды, при этом известно распределение вероятностей этих состояний $\mathbf{q} = (q_1;\, q_2;\, q_3) = (0{,}3;\, 0{,}4;\, 0{,}3)$;
3. известна платежная матрица

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{3\times 3} = \left(r_{i\,j}\right) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ 70 & 12 & -50 \\ 26 & 30 & -30 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Предварительно рассчитаем значения ожидаемые нормы прибыли активов $m_i = \mathrm{M}(R_i) = \sum_{j=1}^{n} r_{i\,j} \cdot q_j$, значения дисперсий соответствующих ДСВ $\sigma^2_i = \mathrm{D}(R_i) = \mathrm{M}(R^2_i) - \mathrm{M}^2(R_i) = \sum_{j=1}^{n} r^2_{i\,j} \cdot q_j - m^2_i$: $m_1 = 10{,}8$, $m_2 = 10{,}8$, $m_3 = 10{,}8$, $\sigma^2_1 = 15{,}96$, $\sigma^2_2 = 2160{,}96$, $\sigma^2_3 = 716{,}16$. Равенство значений $m_1 = m_2 = m_3$ ожидаемых норм прибыли активов означает, что в рассматриваемом случае решение задачи двухкритериальной оптимизации (1)-(3) сводится к решению задачи однокритериальной оптимизации (2)-(3), т.е. к оптимизации уровня риска портфелей, составленных из трех рассматриваемых активов и допустимых в модели Блэка. Проверим соблюдение требований теоремы 2.

По известной матрице (5) построим матрицу $\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{6\times 3} = \left(r'_{i\,j}\right)$:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}'_{3\times 3} = \left(r'_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 5 \\ -15 & -12 & -5 \\ 70 & 12 & -50 \\ -70 & -12 & 50 \\ 26 & 30 & -30 \\ -26 & -30 & 30 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Нижняя чистая цена АИ, заданной матрицей (6), равняется
$\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j r_{ij} = \max\{5; -15; -50; -70; -30; -30\} = 5$.

Верхняя чистая цена АИ, заданной матрицей (6), равняется
$\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\limits_j \max\limits_i r_{ij} = \max\{70; 30; 50\} = 30$.

Т.к. $\alpha = 5 < 30 = \beta$, то АИ, заданная матрицей (6), не содержит седловой точки и не имеет решения в чистых стратегиях.

Поскольку $\min\limits_{i,j} r'_{ij} = -70 \le 0$, найдем $c = \left|\min\limits_{i,j} r'_{ij}\right| + 1 = |-70| + 1 = 70 + 1 = 71$.
Изменим масштаб матрицы (6) по формуле $a_{ij} = r'_{ij} + c = r'_{ij} + 71$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{3\times 3} = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 86 & 83 & 76 \\ 56 & 59 & 66 \\ 141 & 83 & 21 \\ 1 & 59 & 121 \\ 97 & 101 & 41 \\ 45 & 41 & 101 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Согласно теореме об изменении масштаба [8, с. 29-30] АИ, заданная матрицей (7), аффинно эквивалентна АИ, заданной матрицей (6). Это означает, что в этих аффинно эквивалентных играх оптимальные стратегии соответствующих игроков совпадают, а для значений их цен справедливо равенство $V^*_{\mathbf{A}} = V^*_{\mathbf{R}'} + c = V^*_{\mathbf{R}'} + 71$,

где $V^*_{\mathbf{R}'} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{R}' \cdot \mathbf{q}^*$, $V^*_{\mathbf{A}} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}^*$. Введем новые переменные $t_j = \dfrac{q_j}{V_{\mathbf{A}}}$, $y_i = \dfrac{p_i}{V_{\mathbf{A}}}$,

где $V_{\mathbf{A}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q}$ — платежная функция АИ, заданной матрицей (7), и приведем АИ, заданную матрицей (7), к симметричной паре взаимно двойственных задач линейного программирования. Эта пара взаимно двойственных задач линейного программирования в этом случае имеет следующий вид:
исходная задача:
$z = t_1 + t_2 + t_3 \to \max$,

$$\begin{cases} 86\cdot t_1+83\cdot t_2+76\cdot t_3\geq 1, \\ 56\cdot t_1+59\cdot t_2+66\cdot t_3\geq 1, \\ 141\cdot t_1+83\cdot t_2+21\cdot t_3\geq 1, \\ t_1+59\cdot t_2+121\cdot t_3\geq 1, \\ 97\cdot t_1+101\cdot t_2+41\cdot t_3\geq 1, \\ 45\cdot t_1+41\cdot t_2+101\cdot t_3\geq 1, \end{cases}$$

$t_j\geq 0$, $j=\overline{1,3}$;

двойственная задача:

$f=y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6\to\min$,

$$\begin{cases} 86\cdot y_1+56\cdot y_2+141\cdot y_3+y_4+97\cdot y_5+45\cdot y_6\leq 1, \\ 83\cdot y_1+59\cdot y_2+83\cdot y_3+59\cdot y_4+101\cdot y_5+41\cdot y_6\leq 1, \\ 76\cdot y_1+66\cdot y_2+21\cdot y_3+121\cdot y_4+41\cdot y_5+101\cdot y_6\leq 1, \end{cases}$$

$y_i\geq 0$, $i=\overline{1,6}$.

Решение исходной задачи имеет следующий вид:

$$\mathbf{t}^*=\left(\frac{1290}{330716};\frac{280}{330716};\frac{2586}{330716}\right),\ z^*=\frac{4156}{330716}.$$

Решение двойственной задачи имеет следующий вид:

$$\mathbf{y}^*=\left(\frac{3728}{330716};0;0;\frac{208}{330716};0;\frac{220}{330716}\right),\ f^*=\frac{4156}{330716}.$$

Применяя формулы $V_{\mathbf{A}}^*=\frac{1}{z^*}=\frac{1}{f^*}=\frac{330716}{4156}$, $V_{\mathbf{R}'}^*=V_{\mathbf{A}}^*-c=V_{\mathbf{A}}^*-71=$ $=\frac{330716}{4156}-71=\frac{35640}{4156}$, $p_i^*=\frac{y_i^*}{V_{\mathbf{A}}^*}$, $q_j^*=\frac{t_j^*}{V_{\mathbf{A}}^*}$, найдем оптимальные стратегии игроков в АИ, заданной матрицей (6): $\mathbf{p}^*=\left(\frac{3728}{4156};0;0;\frac{208}{4156};0;\frac{220}{4156}\right)$, $\mathbf{q}^*=\left(\frac{1290}{4156};\frac{280}{4156};\frac{2586}{4156}\right)$. Очевидно, все требования теоремы 2 в этом случае выполняются. Следовательно, согласно формулам, приведенным в теореме 2, вектор $\mathbf{x}^*=\left(\frac{3728}{3300};-\frac{208}{3300};-\frac{220}{3300}\right)\approx(1{,}1297;-0{,}0630;-0{,}0667)$ задает структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска в модели Блэка. Для проверки того, что найденный портфель $\mathbf{x}^*$ является портфелем без риска, вычислим значения нормы прибыли этого портфеля для всех возможных состояний:

$$r_1^* = \sum_{i=1}^{k} r_{i1} \cdot x_i^* = 15 \cdot \frac{3728}{3300} + 70 \cdot \left(-\frac{208}{3300} \right) + 26 \cdot \left(-\frac{220}{3300} \right) = \frac{35640}{3300} = 10{,}8\,,$$

$$r_2^* = \sum_{i=1}^{k} r_{i2} \cdot x_i^* = 12 \cdot \frac{3728}{3300} + 12 \cdot \left(-\frac{208}{3300} \right) + 30 \cdot \left(-\frac{220}{3300} \right) = \frac{35640}{3300} = 10{,}8\,,$$

$$r_3^* = \sum_{i=1}^{k} r_{i3} \cdot x_i^* = 5 \cdot \frac{3728}{3300} + (-50) \cdot \left(-\frac{208}{3300} \right) + (-30) \cdot \left(-\frac{220}{3300} \right) = \frac{35640}{3300} = 10{,}8\,.$$

Итак, $R_{\mathbf{x}}^* = \sum_{i=1}^{k} R_i \cdot x_i^* \equiv 10{,}8$. Справедливость этого равенства и означает, что найденный портфель $\mathbf{x}^*$ является портфелем без риска.

ВЫВОДЫ

Проведенное исследование позволяет прийти к следующим выводам.

1. Инвестор стремится формировать портфель, обладающий наименьшим уровнем экономического риска, в случаях, когда с точки зрения инвестора ему нецелесообразно рисковать. К таким случаям можно отнести, например, наличие 1) кризиса, 2) предкризисной ситуации, 3) существенной несклонности инвестора к риску и т.п.
2. В большинстве случаев, если возможно корректное применение теоретико-игрового метода выбора структуры оптимального портфеля, то удается найти структуру портфеля, обладающего наименьшим уровнем риска. Это обусловлено особенностями теории антагонистических игр (АИ). В первую очередь тем, что решение АИ ориентирует лицо, принимающее решения, на предельно осторожное поведение.
3. Применение АИ позволяет оптимизировать уровень риска портфелей, допустимых в модели Блэка, что возможно, например, в случае, когда в АИ, заданной матрицей, нечетные строки которой характеризуют нормы прибыли соответствующих активов, а четные строки представляют собой предыдущие строки, умноженные на число (– 1), второй игрок имеет вполне смешанную оптимальную стратегию.

В дальнейших исследованиях планируется уделить внимание теоретико-игровым методам оптимизации уровня риска портфеля в условиях неполноты информации, когда истинные законы распределения случайных величин, характеризующих нормы прибыли активов, составляющих портфель инвестора, точно неизвестны.

Список литературы

1. Markowitz H. M. Portfolio Selection / H. M. Markowitz // Journal of Finance. — March, 1952. — Vol. 7, No. 1. — P. 77-91.
2. Markowitz H. M. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments / H. M. Markowitz. — N. Y. : John Wiley & Sons, 1959. — 384 p.

3. Сігал А. В. Застосування теорії ігор щодо теорії портфеля / А. В. Сігал // Машинна обробка інформації: Міжвід. наук. зб. — Вип. 61. — К. : КНЕУ, 1998. — С. 154-160.
4. Сигал А. В. Основы современной теории портфеля ценных бумаг: Учебное пособие / А. В. Сигал. — Симферополь : КЭИ КНЭУ, 1998. — 60 с.
5. Економічний ризик: ігрові моделі / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко, А. В. Сігал, Я. С. Наконечний / За ред. д-ра екон. наук, проф. В. В. Вітлінського. — К. : КНЕУ, 2002. — 446 с.
6. Сигал А. В. Теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля в условиях неопределенности и риска / А. В. Сигал // Экономическая политика и фондовый рынок: модели и методы системного анализа. Труды ИСА РАН — М. : Поли Принт Сервис, 2009. — Т. 47. — С. 126-136.
7. Сигал А. В. Теоретико-игровая оптимизация структуры портфеля в условиях частичной определенности / А. В. Сигал // Математическое моделирование, оптимизация и информационные технологии : труды докладов 2-й междунар. науч. конф. 24-26 марта 2010, Кишинэу. — С. 181-187.
8. Воробьев Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н. Н. Воробьев. — М. : Наука, 1985. — 272 с.

Статья поступила в редакцию 10. 11. 2014 г.