

УДК:330.131.7

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИГРА ЛУКИ ПАЧОЛИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Сигал А. В., Сигал С. А.

*Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: ksavo3@gmail.com*

В данной статье предложена теоретико-игровая модель параметрической задачи Луки Пачоли. Рассмотрены особенности этой задачи в зависимости от разных значений параметра. Рассмотрен конкретный числовой пример применения задачи Луки Пачоли в экономике.

Ключевые слова: теоретико-игровая модель; параметрическая задача; задача Луки Пачоли; экономика.

ВВЕДЕНИЕ

В 1494 году итальянский математик, один из основоположников современных принципов бухгалтерии, монах-францисканец Лука Пачоли (1445-1514) издал труд «Сумма [знаний] по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», посвященный арифметическим действиям, алгебраическим уравнениям и их применению в геометрии. В этой книге Лука Пачоли приводит несколько задач о разделе ставки при незавершенной игре.

Задачей Луки Пачоли будем называть задачу о разделе ставки при незавершенной игре двух лиц, бросающих монету. При этом игроки поставили по 105 лир с условием, что общий выигрыш (210 лир) достанется тому, кто первым выиграет три партии. После того как первый игрок выиграл две партии, а второй — одну, игра прервалась. Как справедливо распределить общий выигрыш? Сам Пачоли предполагал, что это следует делать в пропорции 2:1, т.е. первому игроку — 140 лир, второму — 70. Долгое время это решение считалось единственно правильным. Впоследствии в 1539 году итальянский математик Джероламо Кардано (1501-1576) справедливо указал, что решение Пачоли недостаточно, так как в нём не учитывается существенное условие игры: оговоренное число выигрышей. В 1556 году итальянский математик Никколо Тарталья (1499-1557) так же отметил, что решение Пачоли нарушает здравый смысл. Очевидно, выигрыш должен быть распределён между игроками с учётом их шансов одержать конечную победу в случае продолжения прервавшейся игры.

В 1654 году французские учёные Блез Паскаль (1623-1662) и Пьер Ферма (1601-1665) в своей переписке окончательно решили задачу Луки Пачоли о разделе ставки при незавершенной игре двух лиц, бросающих монету. Согласно решению Паскаля и Ферма первый игрок должен получить 157,5 лиры, второй — 52,5 лиры, что соответствует пропорции 3:1.

М. В. Губко и Д. А. Новиков отмечают, что зарождение теории игр «можно датировать 29 июля 1654 г., то есть днем, когда Б. Паскаль написал известное письмо П. Ферма (это же письмо считается началом теории вероятностей)» [1, с. 44]. Теория вероятностей и теория игр, действительно, имеют общие исторические (в частности, рассмотренную задачу Луки Пачоли) и научные корни.

Однако при рассмотрении, например, салонных игр теорию вероятностей интересуют вопросы оценки возможности наступления тех или иных событий и т.п., а теорию игр — вопросы поведения игроков, правил определения выигрышей и т.д.

Задача Луки Пачоли представляет собой определённую игру, которую будем называть игрой Луки Пачоли. Итак, **игра Луки Пачоли** — это задача о разделе ставки при незавершённой игре двух лиц, бросающих монету, при условии, что общий выигрыш должен был бы достаться тому игроку, который первым выиграет три партии, но игра прервалась, когда первый игрок выиграл две партии, а второй — одну.

Цель данной статьи — исследование игры Луки Пачоли в случае произвольных значений вероятностей выигрышей игроков в одной, отдельно взятой, партии игры и анализ применения параметрической игры Луки Пачоли для принятия управленческих решений в экономике, в первую очередь, с целью оптимизации распределения ресурсов в рассматриваемой экономической системе, например, с целью оптимизации распределения ресурсов в корпорациях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Асват Дамодаран считает, что до 1494 года экономическая наука не использовала никаких мер риска, так как риск «считался либо предначертанным судьбой и значит неотвратимым, или Божественным провиденьем, и влиять на него можно было исключительно молитвами и жертвоприношением» [2, с. 118]. Паскаль и Ферма, решив задачу Луки Пачоли, заложили основы теории вероятностей, что впоследствии позволило использовать вероятностные меры риска.

Это обстоятельство означает, что задачу Луки Пачоли можно считать началом как современной системы показателей количественной оценки экономического риска, так и самой теории экономического риска. Таким образом, задача Луки Пачоли — это общий исток трёх наук: и теории вероятностей, и теории игр, и теории экономического риска.

Зададим игру Луки Пачоли в развёрнутой (экстенсивной) форме, то есть представим её в виде дерева принятия решений. Вершины дерева решений — это текущие игровые ситуации, а, соединяющие вершины, дуги — это возможные переходы между ситуациями. «Корень» этого дерева, то есть вершина, расположенная слева, соответствует ситуации игры в её начале, а его конечные (терминальные) вершины, расположенные справа, — возможным исходам игры. Каждой конечной вершине ставится в соответствие вектор выигрышей игроков, имеющий вид $(K_1; \dots; K_l; \dots; K_L)$, где $L = 2$ — число игроков, l — произвольный игрок. Для определённости будем считать, что выигрыш лица (игрока) l , первым выигравшим три партии продолженной игры, равен $K_l = K$ денежных единиц (ДЕ), при этом выигрыш другого игрока будем считать равным $K_{3-l} = 0$ ДЕ, где $l = \overline{1, 2}$. Следовательно, сумма выигрышей обоих игроков в игре Луки Пачоли постоянна и равна значению общего выигрыша: $K_1 + K_2 = K$.

Введём следующие обозначения: p , q — вероятность выигрыша первого, второго, соответственно, игрока в одной, отдельно взятой, партии игры. Очевидно,

$$p > 0, q > 0, p + q = 1. \quad (1)$$

На рис. 1 изображена игра Луки Пачоли в развёрнутой (экстенсивной) форме. Здесь подразумевается, что игроки продолжают игру. Дуги, идущие из вершин вверх, соответствуют выигрышу в соответствующей партии первого игрока, а дуги, идущие из вершин вниз, — выигрышу второго игрока. Так как значениями вероятностей p , q могут быть любые числа, удовлетворяющие соотношениям (1), а значением общего выигрыша K — любое положительное число, далее в отличие от задачи Луки Пачоли в её традиционной постановке рассматриваемую игру будем называть **параметрической игрой Луки Пачоли**.

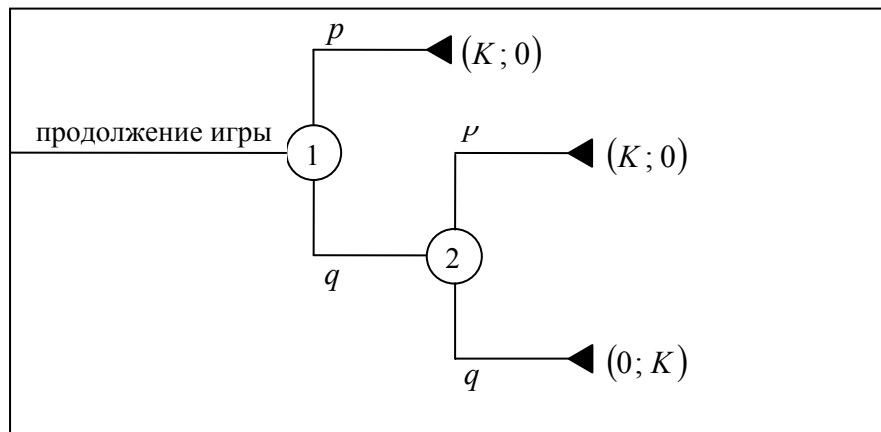


Рис. 1. Параметрическая игра Луки Пачоли в развёрнутой (экстенсивной) форме.

2. НЕРЕШЁННЫЕ ЧАСТИ ПРОБЛЕМЫ

Параметрическая игра Луки Пачоли — это игра Луки Пачоли в случае произвольных значений вероятностей выигрышей игроков в одной, отдельно взятой, партии игры.

Очевидно, если игроки продолжают прерванную игру, то до победы в игре одного из игроков им предстоит сыграть ещё одну, четвёртую по счёту, партию или две, четвёртую и пятую, партии. Справедливым распределением ставок в параметрической игре Луки Пачоли будем считать такое распределение общего выигрыша K ДЕ между игроками, которое учитывает шансы каждого из игроков победить в игре в случае её продолжения до победы одного из них.

Пусть P , Q — вероятность выигрыша в параметрической игре Луки Пачоли первого, второго игрока, соответственно, в случае её продолжения до победы одного из игроков, K_i — величина выигрыша в параметрической игре Луки Пачоли

l -го игрока, то есть получаемая им ставка при справедливом распределении общего выигрыша K ДЕ, $x_l^* = \frac{K_l}{K}$ — доля ставки игрока l . Очевидно, имеем

$$P > 0, Q > 0, P + Q = 1.$$

К нерешённым частям проблемы можно отнести, в частности, вопросы:

1. зависимость значений вероятностей P и Q выигрышей игроков в параметрической игре Луки Пачоли от значений параметров p и q ;
2. зависимость значений ставок игроков, которые они должны получить при справедливом распределении общего выигрыша K ДЕ в параметрической игре Луки Пачоли, от значений параметров p и q ;
3. возможные обобщения параметрической игры Луки Пачоли;
4. применение параметрической игры Луки Пачоли для принятия управленческих решений в экономике.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выразим значения вероятностей P и Q через параметры p и q . Исходя из развёрнутой формы параметрической игры Луки Пачоли, приведённой на рис. 1, легко получить соотношения

$$P = p + q \cdot p, \quad (2)$$

$$Q = q^2. \quad (3)$$

Собственно, формулы (2) и (3) несложно получить при помощи основных теорем теории вероятностей [3]: формулы полной вероятности и теоремы умножения для независимых событий. Исследуем зависимость значений вероятностей P и Q от значений параметров, которые они могут принимать в случае подбрасывания одного игрового кубика (таблице 1).

Таблица 1

Значения вероятностей P и Q выигрышей игроков при однократном подбрасывании игрового кубика

p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$
q	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
P	$\frac{11}{36}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{35}{36}$
Q	$\frac{25}{36}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

Если параметрам придать равные значения $p = q = 0,5$, то получим задачу Луки Пачоли в её традиционной постановке для случая подбрасывания монеты.

Естественно, шансы игроков победить в параметрической игре Луки Пачоли, если игроки продолжают игру, оцениваются значениями вероятностей P и Q . Зависимость значений долей ставок игроков при справедливом распределении общего выигрыша K ДЕ в параметрической игре Луки Пачоли от значений параметров p и q можно представить следующими соотношениями:

$$x_1^* = P = p + q \cdot p, \quad (4)$$

$$x_2^* = Q = q^2. \quad (5)$$

С учётом формул (4) и (5) для зависимостей значений ставок игроков при справедливом распределении общего выигрыша K ДЕ в параметрической игре Луки Пачоли от значений параметров p и q получаем следующие выражения:

$$K_1^* = x_1^* \cdot K = P \cdot K = (p + q \cdot p) \cdot K, \quad (6)$$

$$K_2^* = x_2^* \cdot K = Q \cdot K = q^2 \cdot K. \quad (7)$$

Для задачи Луки Пачоли в её традиционной постановке в случае подбрасывания монеты применение формул (4)-(7) приводит, естественно, к результату, полученному Паскалем и Ферма:

$$x_1^* = P = p + q \cdot p = 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,75, \quad x_2^* = Q = q^2 = (0,5)^2 = 0,25,$$

$$K_1^* = x_1^* \cdot K = 0,75 \cdot 210 = 157,5 \text{ лир}, \quad K_2^* = x_2^* \cdot K = 0,25 \cdot 210 = 52,5 \text{ лир}.$$

В научной литературе, как правило, ограничиваются рассмотрением роли задачи Луки Пачоли, которую она сыграла в истории науки. Рассмотрим возможные экономические приложения параметрической игры Луки Пачоли. Предварительно отметим, что, так как параметрическая игра Луки Пачоли, несомненно, относится к распределительным задачам, следует ожидать возможность и целесообразность её применения в экономике, в первую очередь, с целью оптимизации распределения ресурсов в рассматриваемой экономической системе, например, с целью оптимизации распределения ресурсов в корпорациях.

Рассмотрим следующую модельную ситуацию. Две равные по численности, составу и структуре группы исполнителей (высококвалифицированных сотрудников корпорации) разрабатывают два проекта, которые в дальнейшем будут использовать в своей деятельности данная корпорация.

Разработка обоих проектов условно разбита на три крупных этапа. Все эти этапы является практически равноценными между собой, как по сложности, так и по объёму составляющих их работ.

Известно, что группа, разрабатывающая первый проект, уже завершила два этапа работы над своим проектом, а группа, разрабатывающая второй проект, завершила лишь один этап работы над своим проектом. Кроме того, известно, что проект, разрабатываемый первой группой, будет использоваться корпорацией в 40 % всех проектов, которые она будет реализовывать в будущем, а проект, разрабатываемый второй группой, — во всех остальных проектах, то есть в 60 % всех проектов, которые она будет реализовывать в будущем.

Руководство корпорации имеет K ДЕ свободных финансовых средств, которые оно выделило на поощрение групп, разрабатывающих указанные проекты (то есть для выплаты премий исполнителям). Руководству корпорации требуется принять решение о справедливом распределении данных финансовых средства между группами, разрабатывающими проекты.

По сути, данную ситуацию принятия решений о распределении свободных финансовых средств корпорации между группами исполнителей характеризует параметрическая игра Луки Пачоли, для которой $p = 0,4$, $q = 0,6$. Согласно формулам (4) и (5) свободные финансовые средства корпорации её руководство должно распределить между двумя группами в следующих долях:

$$x_1^* = P = p + q \cdot p = 0,4 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,64, \quad x_2^* = Q = q^2 = 0,6^2 = 0,36.$$

Таким образом, справедливым распределением свободных финансовых средств корпорации является следующее распределение: $x_1^* \cdot 100\% = 0,64 \cdot 100\% = 64\%$ всех свободных финансовых средств необходимо выделить группе, разрабатывающей первый проект, а $x_2^* \cdot 100\% = 0,36 \cdot 100\% = 36\%$ — группе, разрабатывающей второй проект.

Следовательно, согласно формулам (6) и (7) премию величиной $K_1^* = x_1^* \cdot K = 0,64 \cdot K$ ДЕ следует выделить группе, разрабатывающей первый проект, а величиной $K_2^* = x_2^* \cdot K = 0,36 \cdot K$ ДЕ — группе, разрабатывающей второй проект. Найденное решение является справедливым в том смысле, что учитывает и выполненную группами часть своего проекта и значимость для корпорации проекта, разрабатываемого соответствующей группой.

Анализ параметрической игры Луки Пачоли завершим перечислением возможных обобщений параметрической игры Луки Пачоли (в зависимости от возможных классификационных признаков), имеющих наибольшее значение для её применения в экономической науке и практике, в частности, для оптимизации распределения ресурсов в корпорациях:

1. в зависимости от числа игроков: множественная параметрическая игра Луки Пачоли, то есть параметрическая игра Луки Пачоли L игроков, где L — заданное натуральное число, $L > 2$;
2. в зависимости от числа повторений партий: параметрическая игра Луки Пачоли, повторяющаяся до того момента, когда игрок l первым одержит победы в N_l партиях игры, где N_l — заданные натуральные числа, $N_l \geq 2$, $l = \overline{1, L}$;
3. в зависимости от момента прекращения игры: параметрическая игра Луки Пачоли, когда игра прерывается после n проведённых партий игры, из которых игрок l выиграл n_l партий, где n — заданное натуральное число, n_l — заданные целые неотрицательные числа, удовлетворяющие соотношениям $n_l < N_l$, $l = \overline{1, L}$, $n = \sum_{l=1}^L n_l$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведён простейший анализ решения параметрической игры Луки Пачоли и её применения для принятия управленческих решений в экономике. Проведённое исследование позволяет сделать ряд выводов.

Во-первых, задачу Луки Пачоли можно считать началом как современной системы показателей количественной оценки экономического риска, так и самой теории экономического риска. Поэтому задача Луки Пачоли о разделе ставки при незавершённой игре двух лиц, бросающих монету, — это общий исток трёх наук: и теории вероятностей, и теории игр, и теории экономического риска.

Во-вторых, параметрическая игра Луки Пачоли — это задача Луки Пачоли о разделе ставки при незавершённой игре двух лиц в случае произвольных значений вероятностей выигрышей игроков в одной, отдельно взятой, партии игры. Значения выигрышей игроков в параметрической игре Луки Пачоли однозначно выражаются через значения параметров игры.

В-третьих, применение параметрической игры Луки Пачоли в экономике возможно и целесообразно, в первую очередь, с целью оптимизации распределения ресурсов в рассматриваемой экономической системе, например, с целью оптимизации распределения ресурсов в корпорациях.

В-четвёртых, для применения параметрической игры Луки Пачоли в экономической науке и практике, в частности, для оптимизации распределения ресурсов в корпорациях, имеют наибольшее значение её обобщения по таким классификационным признакам: а) в зависимости от числа игроков; б) в зависимости от числа повторений партий; в) в зависимости от момента прекращения незавершённой игры.

В дальнейших исследованиях планируется подробно исследовать применение в экономической науке и практике параметрической игры Луки Пачоли и её различных обобщений по указанным выше классификационным признакам. Применение в экономической науке и практике параметрической игры Луки Пачоли и её различных обобщений позволит, в частности, оптимизировать распределение ресурсов в различных экономических системах, в том числе оптимизировать распределение ресурсов в корпорациях. Особое внимание следует уделить вопросам обоснования корректности применения в экономической науке и практике параметрической игры Луки Пачоли и её различных обобщений.

Список литературы

1. Губко М. В. Теория игр в управлении организационными системами. Учебное пособие / М. В. Губко, Д. А. Новиков. — М.: СИНТЕГ, 2002. — 148 с.
2. Дамодаран А. Стратегический риск-менеджмент: принципы и методика / А. Дамодаран ; пер. с англ. О. Л. Пелявский, Е. В. Трибушная. — М.: Вильямс, 2010. — 496 с.
3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. — М.: Высш. шк., 2002. — 479 с.

Сігал А. В. Параметрична гра Луки Пачолі та її застосування в економіці / А. В. Сігал, С. А. Сігал // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І Вернадського. Серія «Економіка і управління». – 2012. – Т. 25 (64). № 3. - С. 190-197.

У даній статті запропонована теоретико-ігрова модель параметричної задачі Луки Пачолі. Розглянуто особливості цієї задачі в залежності від різних значень параметра. Розглянуто конкретний числовий приклад застосування задачі Луки Пачолі в економіці.

Ключові слова: теоретико-ігрова модель; параметрична задача; задача Луки Пачолі.

Sigal A. V. Parametric Game Luca Pacioli and its Application in Economics / A. V. Sigal, S. A. Sigal // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Economy and Management. – 2012. - Vol. 25 (64), № 3. – P. 190-197.

This paper proposes a game-theoretical model of parametric problem Luca Pacioli. The features of this problem, depending on different parameter values. A concrete numerical example of the problem Luca Pacioli in the economy is considered.

Keywords: game-theoretic model, the parametric problem, a problem Luca Pacioli.

Стаття поступила в редакцію 11. 12. 2012 г.