Ученые записки Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского. Экономика и управление. 2017. Т. 3 (69). № 4. С. 63–76.

УДК 338.27

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ С ЭВОЛЮЦИЕЙ АМПЛИТУДЫ

Семенычев Е. В.[1], Демидов В. В.[2]

[1]Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского», Симферополь, Российская Федерация
E-mail: semen05@inbox.ru
[2]МБОУ ВО «Самарская академия государственного и муниципального управления», Самара, Российская Федерация
E-mail: vadidemidov@yandex.ru

Для моделирования периодической экономической динамики с эволюционирующей (изменяемой во времени) амплитудой предложен ряд аналитических моделей (параметрическая модель гармонической функции синуса или косинуса; модель периодической динамики) от независимой переменной времени, в которых параметр амплитуды представлен в виде функций, а также предложены методы идентификации параметров предложенных моделей. Доказано, что предложенный комплекс аналитических моделей можно использовать для описания динамики сезонных и циклических колебаний экономических показателей с эволюцией амплитуды, и продемонстрирована методика определения оценки их параметров. Установлено, что предложенный метод позволяет проводить параметризацию моделей периодической динамики, описываемой аддитивной комбинацией трёх (а при необходимости и более) гармоник с фазами, с эволюцией амплитуды по обобщённому экспоненциальному закону.
Ключевые слова: модель, гармоническая функция, эволюция амплитуды.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальной задачей является получение моделей периодической динамики различных экономических показателей в аналитическом виде.

Априорное предположение о стационарности периодической экономической динамики (циклической и сезонной) может не соответствовать реалиям. Достаточно часто в экономической практике встречаются циклические и сезонные процессы с изменяемой (эволюционирующей) во времени формой волны, но при этом период изменения экономического показателя остаётся постоянным.

Эволюционирующая периодическая динамика — достаточно распространенное явление в экономике. Неизменность параметров сезонной или циклической волны является скорее исключением, чем правилом. Так, например, периодичные колебания производства целого ряда важнейших видов промышленной продукции (выработка электроэнергии, производство спирта, добыча газа, продажи сигарет [1]) характеризуются эволюционными изменениями во времени.

При этом периодические колебания экономических показателей, природа возникновения которых и постоянность периода в большей степени определена факторами макросреды, по наблюдениям учёных, чаще демонстрируют эволюцию амплитуд. Под воздействием различных факторов амплитуда колебательной компоненты может нарастать или уменьшаться, стабилизироваться, расти после уменьшения и т. д.

Возможность эволюции циклических и сезонных компонент в тренд-сезонных динамических рядах экономических показателей отмечают многие авторы, однако методы получения модели эволюционирующей периодической динамики в параметрическом виде до настоящего времени разработаны недостаточно. Приоритет и преимущества использования именно параметрического подхода к моделированию периодической динамики обоснованы в [2].

ОСНОВНОЙ МАТЕРИАЛ

Динамику периодического изменения значений экономического показателя можно в простейшем случае представить параметрической моделью гармонической функции синуса или косинуса от независимой переменной времени t (рис. 1):

$$S(t) = A\sin\left(\omega t + \psi\right) \tag{1}$$

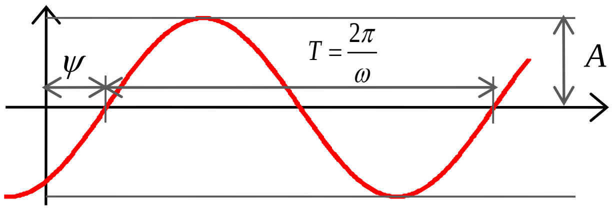


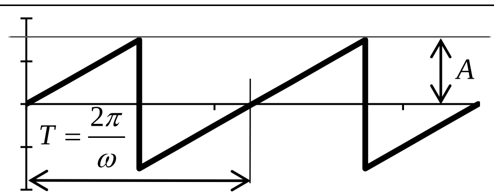
Рис. 1. Простейшая гармоническая функция, моделирующая колебательную компоненту

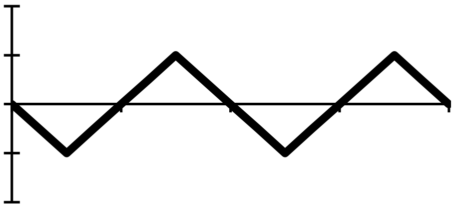
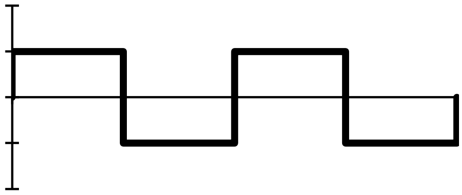
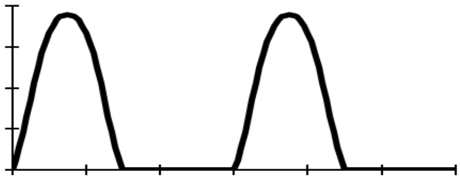
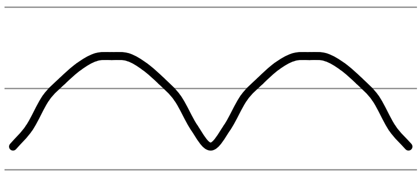
Гармоническую функцию характеризуют три параметра: амплитуда A, фаза ψ и циклическая частота $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ (где f — линейная частота, а T — период колебаний).

Модель периодической динамики вида (1) является скорее исключением и встречается очень редко в экономической практике. На практике периодическая динамика зачастую имеет более сложную форму, чем гармоника (1), и описывается совокупностью нескольких гармонических функций — полигармонической моделью. Известен ряд типичных видов стационарной периодической динамики, математические модели которых могут быть получены разложением в ряд Фурье с определённым соотношением частот и амплитуд [3] (табл. 1).

Таблица 1

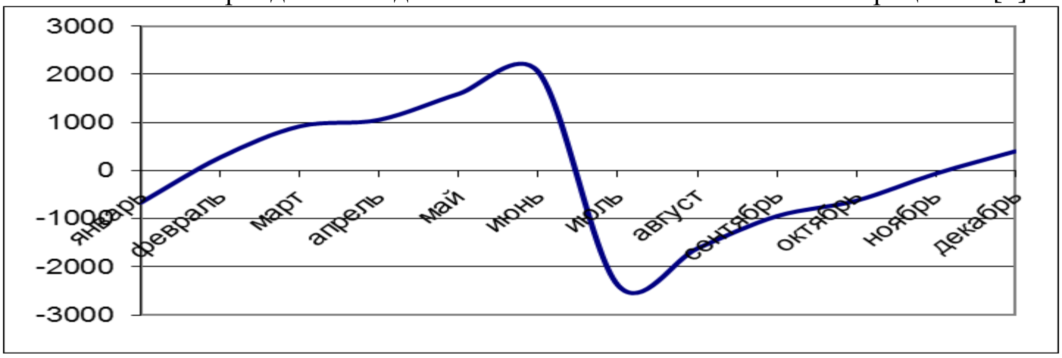
Различные виды периодической динамики

Название вида, формула	Графическое изображение
«Пилообразная» $S(t) = A\sin(\omega t + \varphi) - \frac{A}{2}\sin(2\omega t + \varphi) + \frac{A}{3}\sin(3\omega t + \varphi) - \ldots$	

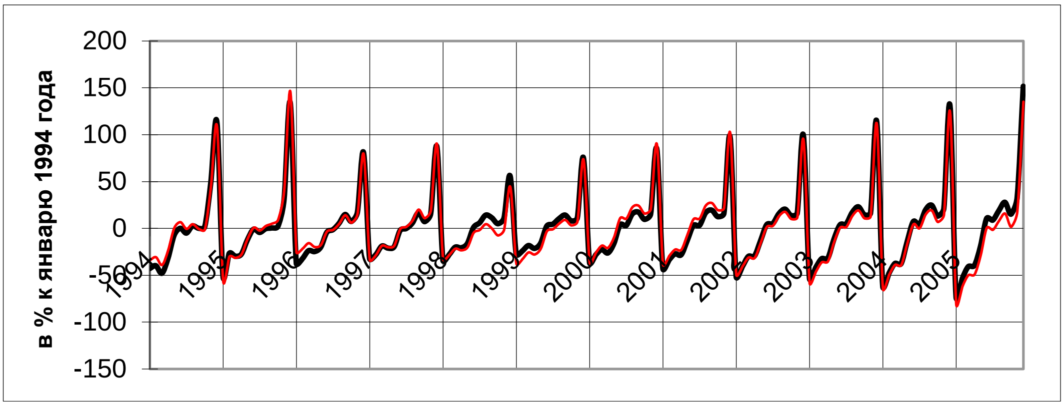
Название вида, формула	Графическое изображение
«Треугольная» $S(t)=A\sin(\omega t+\varphi)-\frac{A}{3^2}\sin(3\omega t+\varphi)+$ $+\frac{A}{5^2}\sin(5\omega t+\varphi)-\ldots$	
«Прямоугольная» $S(t)=A\sin(\omega t+\varphi)+\frac{A}{3}\sin(3\omega t+\varphi)+$ $+\frac{A}{5}\sin(5\omega t+\varphi)+\ldots$	
«Куполообразная» (1-й тип) $S(t)=A\sin(\omega t+\varphi)-\frac{A_2}{1\cdot 3}\cos(2\omega t+\varphi)-$ $-\frac{A_2}{3\cdot 5}\cos(4\omega t+\varphi)-\frac{A_2}{5\cdot 7}\cos(6\omega t+\varphi)-\ldots$	
«Куполообразная» (2-й и 3-й тип) $S(t)=-\frac{\cos 2\omega t}{1^2}-\frac{\cos 4\omega t}{2^2}-\frac{\cos 6\omega t}{3^2}-\ldots$ $S(t)=\cos\omega t-\frac{\cos 2\omega t}{2^2}+\frac{\cos 3\omega t}{3^2}-\ldots$	

Источник: [8].

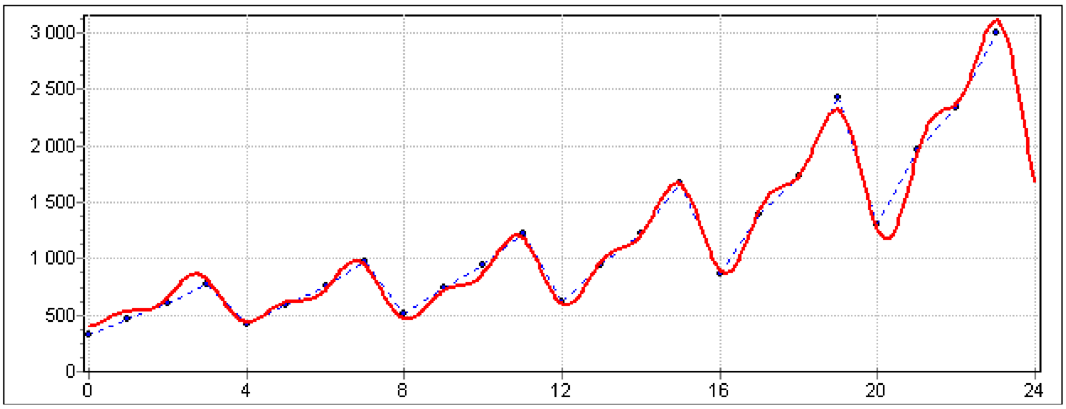
Имеется достаточно много подтверждений (рис. 2; 3; 4) о присутствии указанных в табл. 1 типов периодической динамики во многих экономических процессах [3]:



а) число подписчиков ежедневной газеты при оформлении подписки два раза в год (чел.)

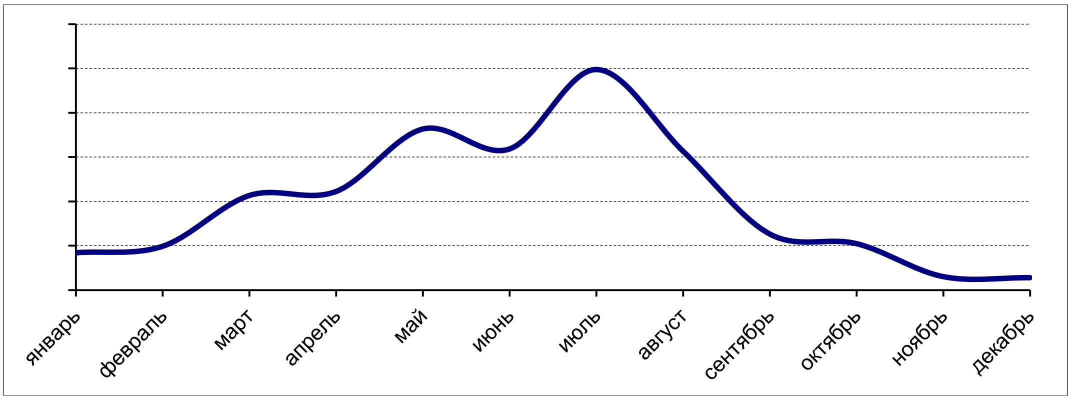


б) индекс реальных инвестиций в основной капитал по России (млрд. руб.)

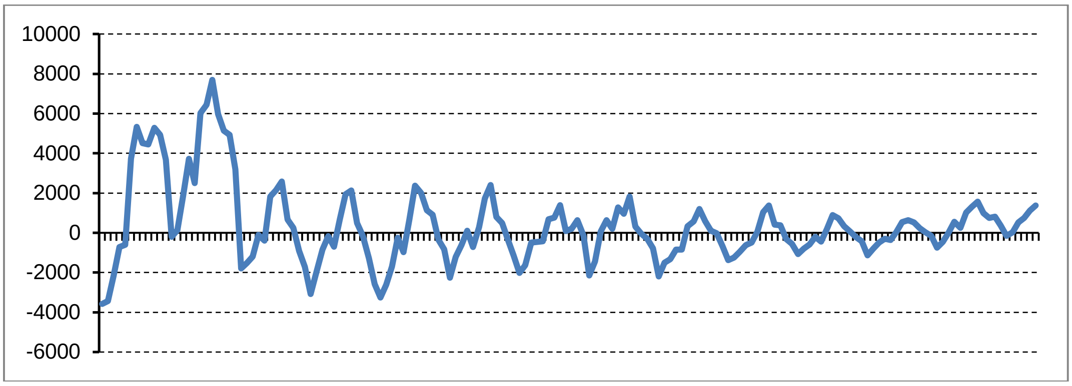


в) фрагмент динамики годовых инвестиций в основной капитал РФ (млрд. руб.)

Рис. 2. Примеры «пилообразной» экономической динамики
Источник: составлено авторами.

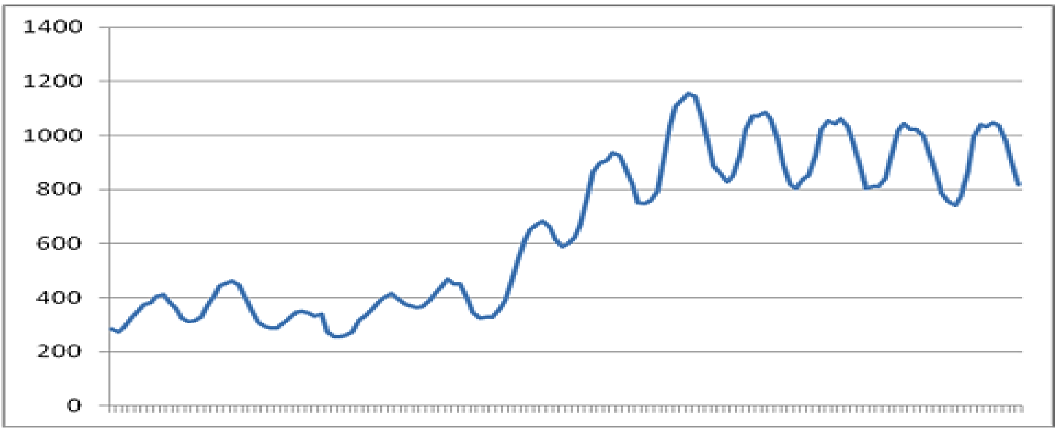


а) объём продаж (в усл. ед.) кровельных материалов

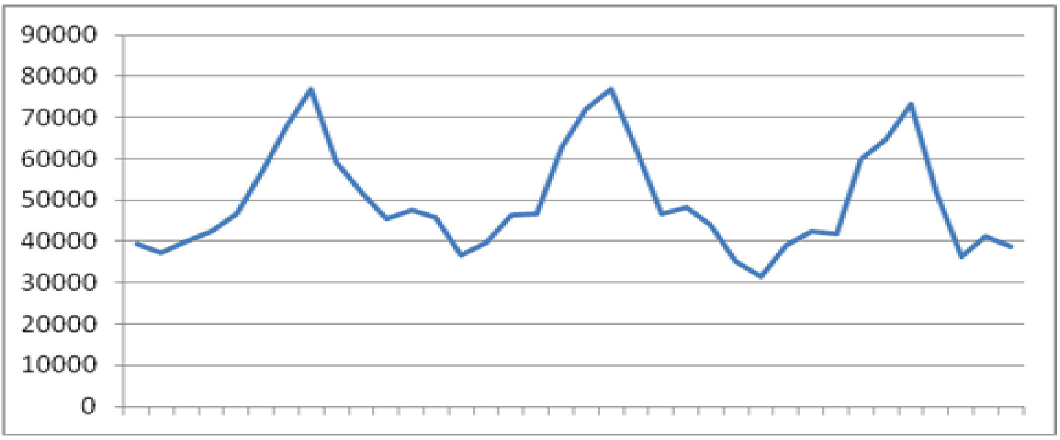


б) выбытие мигрантов (чел.) из РФ

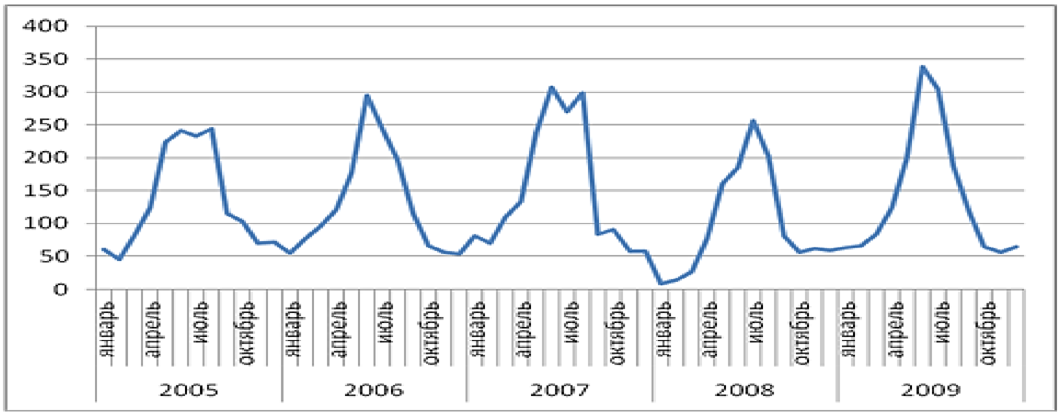
Рис. 3. Примеры «треугольной» экономической динамики
Источник: данные собраны авторами, рисунки авторов.



а) заявленная потребность в работниках в РФ, тыс. чел.



б) пассажирооборот авиакомпании, тыс. чел.



в) продажи мороженого, т.

Рис. 4. Примеры «куполообразной» экономической динамики
Источник: данные собраны авторами, рисунки авторов.

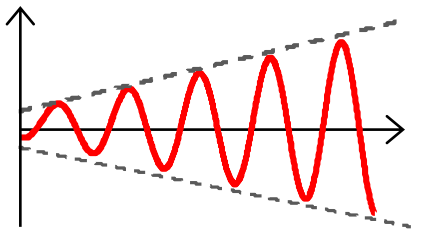
В общем виде все случаи эволюции амплитуды периодической динамики можно записать в виде мультипликативного взаимодействия произвольной функции, отражающей тенденцию изменения амплитуды во времени, и полигармонической моделью колебательной компоненты вида (2):

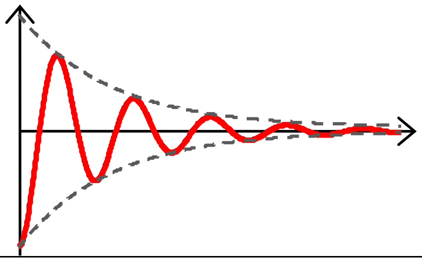
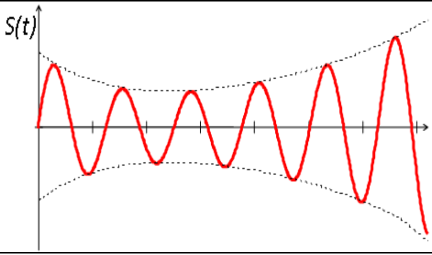
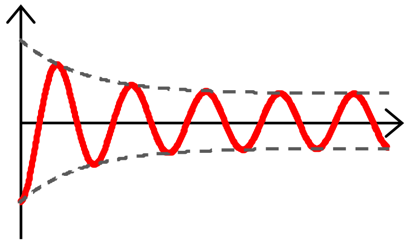
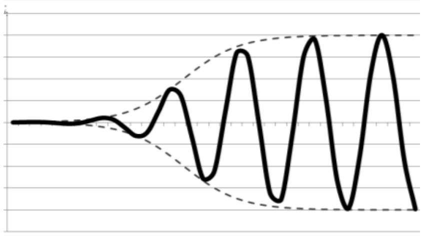
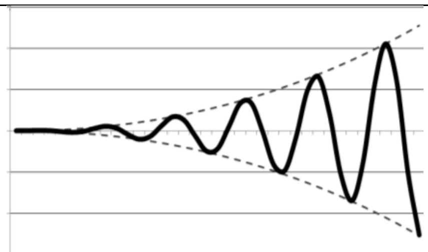
$$S\ (t) = F(t)\left[A_1 \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) + A_3 \sin\left(\omega_3 t + \varphi_3\right) + \ldots\right] \qquad (2)$$

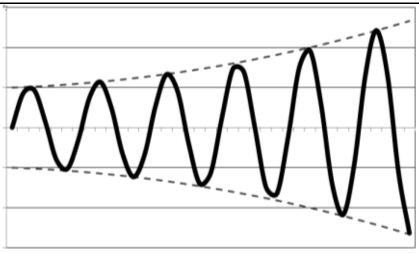
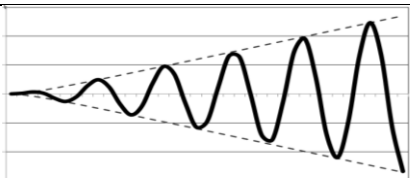
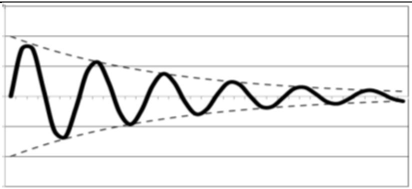
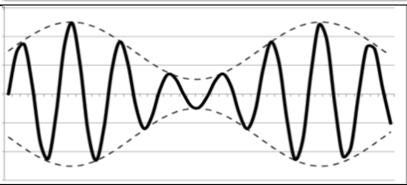
Функция $F(t)$ при мультипликативном взаимодействии с полигармонической компонентой вида (2) задаёт, по сути, фронт изменения её амплитуды. Приведём сводную таблицу некоторых функций, перспективных с точки зрения описания эволюции амплитуд математических функций при моделировании периодической экономической динамики (табл. 2).

Таблица 2

Возможные модели эволюции амплитуд

№ п/п	Общее название $F(t)$	Аналитическое выражение $F(t)$ в сочетании с гармоникой	Графическое изображение
1	Линейная	$S(t) = (A_0 + A_1 t)\sin\left(\omega t + \psi\right)$	

№ п/п	Общее название $F(t)$	Аналитическое выражение $F(t)$ в сочетании с гармоникой	Графическое изображение
2	Экспоненциальная	$S(t)=Ae^{-\alpha t}\left[A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+...\right]$	
3	Экспоненциальная аддитивная	$S(t)=(A_1e^{-\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t})\sin(\omega t+\varphi)$	
4	Обобщённая экспоненциальная	$S(t)=(A_0+A_1e^{-\alpha t})\sin(\omega t+\varphi)$	
5	Логистическая	Логиста Верхулста $S(t)=\dfrac{1}{A_0+A_1e^{-\alpha t}}\sin(\omega t+\psi)$ Логиста Рамсея $S(t)=C(1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t})\sin(\omega t+\psi)$	
6	Алгебраически полиномиальная	Квадратичная парабола $S(t)=(A_0+A_1t+A_2t^2)\sin(\omega t+\psi)$ Кубическая парабола $S(t)=(A_0+A_1t+A_2t^2+A_3t^3)\sin(\omega t+\psi)$	

№ п/п	Общее название $F(t)$	Аналитическое выражение $F(t)$ в сочетании с гармоникой	Графическое изображение
7	Гиперболически полиномиальная	Равностороняя $S(t)=\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{A_1 t}\right)\sin\left(\omega t+\psi\right)$	
		Квадратичная $S(t)=\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{A_1 t}+\frac{1}{A_2 t^2}\right)\sin\left(\omega t+\psi\right)$	
8	Дробно-рациональная	$S(t)=\frac{P_0+P_1 t+\ldots+P_m t^m}{1+Q_1 t+\ldots+Q_n t^n}\sin\left(\omega t+\psi\right)$	
9	Показательная	$S(t)=A^{-\alpha t}\sin\left(\omega t+\psi\right)$	
10	Периодическая	$S(t)=\left[A_0+A_1\sin(\omega_1 t+\psi_1)\right]\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$	

Источник: составлено авторами.

Каждая из предложенных в табл. 2 моделей отражает специфическую динамику изменения амплитуды гармоники, которая может соответствовать отдельным задачам экономической динамики.

Отметим, что методика определения параметров полигармонических функций, описывающих периодическую динамику, разработана и описана в [4] и включает методы определения параметров нелинейных функций простейшей гармоники вида (1) с использованием ARMA-моделирования [5] или генетического алгоритма [6], метода частотной декомпозиции [4] и авторской программы для ЭВМ [7].

Приведём решение задачи параметризации модели периодической динамики с эволюцией амплитуды по обобщенному экспоненциальному закону с полигармоническим представлением колебательной компоненты:

$$S\ (t)=(A_0+e^{-\alpha t})\left[A_1\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+A_2\sin\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)+A_3\sin\left(\omega_3 t+\varphi_3\right)\right] \tag{3}$$

Отметим, что использование в (3) трёх гармоник вместо теоретически бесконечного числа гармоник (2) оправдано многочисленными исследованиями авторов [3], т. к. большее число гармоник не даёт существенного приращения точности для экономических задач.

В дискретных наблюдениях модель (3) принимает вид:

$$S_k = (A_0 + e^{-\alpha k\Delta})\left[A_1\sin\left(\omega_1 k\Delta + \varphi_1\right) + A_2\sin\left(\omega_2 k\Delta + \varphi_2\right) + A_3\sin\left(\omega_3 k\Delta + \varphi_3\right)\right] =$$
$$= A_{10}\sin\omega_1 k\Delta + A_{11}\cos\omega_1 k\Delta + A_{12}\omega_2 k\Delta + A_{13}\omega_2 k\Delta + A_{14}\sin\omega_3 k\Delta + A_{15}\sin\omega_3 k\Delta +$$
$$+A_4 e^{-\alpha k\Delta}\sin\omega_1 k\Delta + A_5 e^{-\alpha k\Delta}\cos\omega_1 k\Delta + A_6 e^{-\alpha k\Delta}\sin\omega_2 k\Delta + A_7 e^{-\alpha k\Delta}\cos\omega_2 k\Delta +$$
$$+A_8 e^{-\alpha k\Delta}\sin\omega_3 k\Delta + A_9 e^{-\alpha k\Delta}\cos\omega_3 k\Delta\,, \tag{4}$$

где $A_{10} = A_0 A_1\cos\varphi_1$, $A_{11} = A_0 A_1\sin\varphi_1$, $A_{12} = A_0 A_2\cos\varphi_2$, $A_{13} = A_0 A_2\sin\varphi_2$, $A_{14} = A_0 A_3\cos\varphi_3$, $A_{15} = A_0 A_3\sin\varphi_3$, $A_4 = A_1\cos\varphi_1$, $A_5 = A_1\sin\varphi_1$, $A_6 = A_2\cos\varphi_2$, $A_7 = A_2\sin\varphi_2$, $A_8 = A_3\cos\varphi_3$, $A_9 = A_3\sin\varphi_3$ — соотношения, позволяющие определить $A_1 = \sqrt{A_4^2 + A_5^2}$, $\varphi_1 = arctg\,\dfrac{A_5}{A_4}$, $A_2 = \sqrt{A_6^2 + A_7^2}$, $\varphi_2 = arctg\,\dfrac{A_7}{A_6}$, $A_3 = \sqrt{A_8^2 + A_9^2}$, $\varphi_3 = arctg\,\dfrac{A_9}{A_8}$, $A_0 = \dfrac{A_{10}}{A_1\cos\varphi_1}$.

Для определения оценок параметров $\alpha^0, A_0^0, A_1^0, A_2^0, A_3^0, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$ можно воспользоваться AR-методом [5], который приведёт к построению авторегрессии 12-го порядка (что уже потребует наличия значительного числа наблюдений, например, при помесячных наблюдениях не менее 48, т. е. за четыре года) и необходимости в последующем решения систем нелинейных алгебраических уравнений высоких порядков. Можно применить и метод генетического моделирования [6], однако гораздо проще выглядит предложенный в [3] метод последовательного определения параметров модели — «поэтапной частотной декомпозиции».

Сначала необходимо определить основные параметры модели — параметры экспоненты α^0, A_0^0 и параметры, определяющие период (основную циклическую частоту ω_1) и фазу φ_1 сезонной волны, а затем последовательно параметры вспомогательных (сопутствующих) гармоник.

Таким образом, процедура параметризации периодической динамики с эволюционирующей по обобщённому экспоненциальному закону амплитудой, будет иметь следующий порядок действий:

1-й этап. Предполагая, что эволюция периодической динамики по обобщённому экспоненциальному закону может быть описана моделью вида:

$$S(t) = \left(A_0 + A_1 e^{-\alpha t}\right)\sin\left(\omega t + \varphi\right), \tag{5}$$

определяются её параметры.

В дискретных наблюдениях (3) принимает вид:

$$S_k = \left(A_0 + A_1 e^{-\alpha k\Delta}\right)\sin\left(\omega k\Delta + \varphi\right) = A_0 \sin\left(\omega k\Delta + \varphi\right) + A_1 e^{-\alpha k\Delta}\sin\left(\omega k\Delta + \varphi\right) =$$

$$= A_2 \sin\omega k\Delta + A_3 \cos\omega k\Delta + A_4 e^{-\alpha k\Delta}\sin\omega k\Delta + A_5 e^{-\alpha k\Delta}\cos\omega k\Delta\,, \qquad (6)$$

где $A_2 = A_0\cos\varphi, A_3 = A_0\sin\varphi, A_4 = A_1\cos\varphi, A_5 = A_1\sin\varphi$, необходимые впоследствии для вычисления $A_0 = \sqrt{A_2^2 + A_3^2}, A_1 = \sqrt{A_4^2 + A_5^2}$ и $\varphi = \pm arctg\,\frac{A_3}{A_2} = \pm arctg\,\frac{A_5}{A_4}$.

Применяя описанную в [5] последовательность линеаризирующих Z-преобразований к модели (6) можно получить следующее уравнение авторегрессии для $k > 4$:

$$D_k = \lambda_1 D_{k-1} + \lambda_2 D_{k-1} - D_{k-2} - \lambda_1\lambda_2 D_{k-2} - \lambda_3 D_{k-2} + \lambda_2 D_{k-3} + \lambda_1\lambda_3 D_{k-3} - \lambda_3 D_{k-4}\,, \qquad (7)$$

где $\lambda_1 = 2\cos\omega\Delta,\ \lambda_2 = 2e^{-\alpha\Delta}\cos\omega\Delta,\ \lambda_3 = 2e^{-\alpha\Delta}$.

Применяя подстановку $\lambda_4 = \lambda_1\lambda_2$ и $\lambda_5 = \lambda_1\lambda_3$, получим линейное относительно неизвестных параметров λ_i выражение:

$$D_k = \lambda_1 D_{k-1} + \lambda_2 D_{k-1} - D_{k-2} - \lambda_4 D_{k-2} + \lambda_3 D_{k-2} + \lambda_2 D_{k-3} + \lambda_5 D_{k-3} - \lambda_3 D_{k-4} \qquad (8)$$

Предполагая аддитивность стохастической компоненты, получим уравнение обобщённой параметрической модели авторегрессии-скользящего среднего для уровней ряда динамики:

$$S_k = \lambda_1 S_{k-1} + \lambda_2 S_{k-1} - S_{k-2} - \lambda_4 S_{k-2} + \lambda_3 S_{k-2} + \lambda_2 S_{k-3} + \lambda_5 S_{k-3} - \lambda_3 S_{k-4} + \varepsilon_k \qquad (9)$$

Неизвестные параметры модели λ_i линейно входят в (9), поэтому для их идентификации можно сформировать систему алгебраических уравнений относительно МНК-оценок этих параметров, используя необходимые условия минимума квадратических невязок:

$$\lambda_i^0 = \arg\min_{\lambda_i} \frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left[\sum_{k=5}^{N}\begin{pmatrix} S_k - (\lambda_1 S_{k-1} + \lambda_2 S_{k-1} + \lambda_2 S_{k-3} - \lambda_3 S_{k-2} - \\ -\lambda_3 S_{k-4} - \lambda_4 S_{k-2} + \lambda_5 S_{k-3} - S_{k-2}) \end{pmatrix}^2\right] \qquad (10)$$

Из (10) получим СЛАУ 5-го порядка относительно неизвестных, решение которой не представляет проблем.

Полученные оценки λ_i^0 позволяют определить $\omega^0 = \frac{1}{\Delta}\arccos\frac{\lambda_1^0}{2}$ и $\alpha^0 = -\frac{1}{\Delta}\ln\frac{\lambda_2^0}{\lambda_1^0}$.

На втором этапе идентификации модели определим МНК оценки параметров A_i^0 в ставшем уже линейным после получения оценок ω^0 и α^0 выражении (6) из условия минимума среднеквадратической невязки:

$$A_i^0 = \arg\min_{A_i} \sum_{k=5}^{N} \left\{ \begin{array}{l} S_k - (A_2 \sin\omega^0 k\Delta + A_3 \cos\omega^0 k\Delta + \\ + A_4 e^{-\alpha^0 k\Delta} \sin\omega^0 k\Delta + A_5 e^{-\alpha^0 k\Delta} \cos\omega^0 k\Delta) \end{array} \right\}^2, \tag{11}$$

что приведёт к необходимости решения нормальной СЛАУ четвертого порядка для получения оценок $A_2^0, A_3^0, A_4^0, A_5^0$, которые позволят, в свою очередь, получить оценки $A_0^0 = \sqrt{(A_2^0)^2 + (A_3^0)^2}$, $A_1^0 = \sqrt{(A_4^0)^2 + (A_5^0)^2}$ и $\varphi^0 = \pm arctg\,\dfrac{A_3^0}{A_2^0} = \pm arctg\,\dfrac{A_5^0}{A_4^0}$.

Таким образом, все параметры модели (6) определены.

Учитывая, что для некоторых экономических процессов период колебаний известен или может быть обоснован логикой моделируемого процесса, можно скорректировать значение основной циклической частоты путём введения её в модель принудительно («вручную»).

Таким образом, в ходе выполнения первого этапа будем иметь оценки параметров $\alpha^0, A_1^0, \omega_1^0, \varphi_1^0$.

2-й этап. Предполагая, что модель с эволюцией амплитуды по обобщённому экспоненциальному закону состоит из двух гармоник,

$$S\ (t) = (1 + e^{-\alpha^0 t})\left[A_1^0 \sin\left(\omega_1^0 t + \varphi_1^0\right) + A_2 \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \right], \tag{12}$$

оценки параметров $\alpha^0, A_1^0, \omega_1^0, \varphi_1^0$ которой уже полностью получены на предыдущем этапе, необходимо определить оценки параметров второй гармоники.

Для этого, из исходного временного ряда имеющихся наблюдений колебательной динамики следует элиминировать (вычесть) модельные значения, полученные на первом этапе, и получить новый временной ряд для определения параметров второй гармоники: $S_k^* = S_k - (1 + e^{-\alpha^0 k\Delta}) A_1^0 \sin\left(\omega_1^0 k\Delta + \varphi_1^0\right)$.

Таким образом, необходимо найти неизвестные параметры модели

$$S_k^* = A^* (1 + e^{-\alpha^0 k\Delta}) \sin\left(\omega_2 k\Delta + \varphi_2\right), \tag{13}$$

соблюдая условие кратности частот $\omega_2 = r_2 \omega_1^0$, где $r_2 > 1$ — любое целое число.

Из-за того, что оценка единственного параметра экспоненты уже получена на предыдущем этапе, то необходимо только получение оценок амплитуды, частоты и фазы гармонической функции, по временному ряду:

$$S_k^{**} = \frac{S_k^*}{1+e^{-\alpha^0 k\Delta}} = A^* \sin\left(\omega_2 k\Delta + \varphi_2\right) \tag{14}$$

Для определения оценок параметра ω_2^0 такой модели также можно воспользоваться методом ARMA-моделирования [5], описанным для простейшей гармоники в [3; 4].

Однако для соблюдения условия кратного числа периодов вспомогательных гармоник в периоде основной гармоники необходимо обеспечить перебор кратных по значению к определённой в ходе решения СЛАУ оценке ω_2^0 и выбрать то значение ω_2^0, которое даёт максимально близкое к 1 значение коэффициента детерминации R^2 модели (14). Подобранное таким образом значение ω_2^0 и будет являться искомой оценкой второй гармоники модели (4).

Оценка амплитуды и фазы второй гармоники A^{*0}, φ_2^0 определяется через нахождение оценок $A_{1,2}^{*0}$ с помощью МНК из условия минимума среднеквадратической невязки $A_i^0 = arg \min \frac{\partial}{\partial A_i}\left[\sum_{k=3}^{N}\left(S_k - (A_1 \sin\omega_0 k\Delta + A_2 \cos\omega_0 k\Delta)\right)^2\right]$ и соотношения $A^0 = \sqrt{A_1^{02} + A_2^{02}}$, $\psi^0 = \pm arctg \frac{A_2^0}{A_1^0}$.

Таким образом, в ходе 2-го этапа будут получены оценки параметров второй гармоники $A_2^0, \omega_2^0, \varphi_2^0$ модели (4).

3-й этап. Предполагая, что модель с эволюцией амплитуды по экспоненциальному закону состоит из трёх гармоник,

$$S\ (t) = (1+e^{-\alpha^0 t})\left[A_1^0 \sin\left(\omega_1^0 t + \varphi_1^0\right) + A_2^0 \sin\left(\omega_2^0 t + \varphi_2^0\right) + A_3 \sin\left(\omega_3 t + \varphi_3\right)\right] \tag{15}$$

оценки параметров экспоненты, основной гармоники и второй вспомогательной (сопутствующей) гармоники $\alpha^0, A_1^0, \omega_1^0, \varphi_1^0, A_2^0, \omega_2^0, \varphi_2^0$ которых уже полностью получены на предыдущих этапах, необходимо определить оценки параметров третьей гармоники.

Для этого из исходного временного ряда имеющихся наблюдений сезонной волны следует элиминировать (вычесть) модельные значения, полученные на предыдущих этапах, и получить новый временной ряд для определения параметров третьей гармоники:

$$S_k^{***} = S_k - (1+e^{-\alpha^0 k\Delta})\left[A_1^0 \sin\left(\omega_1^0 k\Delta + \varphi_1^0\right) + A_2^0 \sin\left(\omega_2^0 k\Delta + \varphi_2^0\right)\right].$$

Таким образом, необходимо найти неизвестные параметры модели

$$S_k^{***} = \frac{S_k - (1+e^{-\alpha^0 k\Delta})\left[A_1^0 \sin\left(\omega_1^0 k\Delta + \varphi_1^0\right) + A_2^0 \sin\left(\omega_2^0 k\Delta + \varphi_2^0\right)\right]}{1+e^{-\alpha^0 k\Delta}} =$$

$$= A^{***}\sin\left(\omega_3 k\Delta + \varphi_3\right), \qquad (16)$$

соблюдая условие кратности частот $\omega_3 = r_3\omega_1^0$, где $r_3 > 1$ — любое целое число.

Для определения оценок параметра ω_3^0 модели (16) можно воспользоваться тем же самым методом, что и на втором этапе, а после перебора кратных по значению к определённой в ходе решения СЛАУ оценке ω_3^0 выбрать то значение ω_3^0, которое даёт максимально близкое к 1 значение коэффициента детерминации R^2 модели (16). Подобранное таким образом значение ω_2^0 и будет являться искомой оценкой третьей гармоники модели (4).

Оценка амплитуды и фазы третьей гармоники A^{***0}, φ_3^0 определяется через нахождение оценок $A_{1,2}^{***0}$ с помощью МНК из условия минимума среднеквадратической невязки $A_i^0 = arg\min \frac{\partial}{\partial A_i}\left[\sum_{k=3}^{N}\left(S_k - (A_1 \sin\omega_0 k\Delta + A_2 \cos\omega_0 k\Delta)\right)^2\right]$ и соотношения $A^0 = \sqrt{A_1^{02} + A_2^{02}}$, $\psi^0 = \pm arctg\frac{A_2^0}{A_1^0}$.

Таким образом, в ходе 3-го этапа будут получены оценки параметров третьей гармоники $A_3^0, \omega_3^0, \varphi_3^0$ модели (4), после чего все её параметры становятся определёнными.

Можно привести аналогичные решения задач параметризации для указанных в табл. 2 моделей в сочетании с одной гармоникой, а для периодической динамики сложной формы, описываемой аддитивной комбинацией нескольких гармоник, с эволюцией амплитуды по достаточно разнообразным законам её изменения, для классических или приближенных к ним видов колебаний (табл. 1) следует применять метод частотной декомпозиции [3], без усложнения приведенных в работе моделей авторегрессий и без решения систем нелинейных алгебраических уравнений высоких порядков.

ВЫВОДЫ

В статье предложен комплекс аналитических моделей, которые можно использовать для описания динамики сезонных и циклических колебаний экономических показателей с эволюцией амплитуды, и продемонстрирована методика определения оценок их параметров.

Отметим, что впервые предложен метод, позволяющий проводить параметризацию моделей периодической динамики, описываемой аддитивной комбинацией трёх (а при необходимости и более) гармоник с фазами, с эволюцией амплитуды по обобщённому экспоненциальному закону.

Список литературы

1. Бессонов В. А. Проблемы анализа российской макроэкономической динамики переходного периода. М.: ИЭПП, 2005. 244 с.

2. Семенычев В. К. Предложение параметрического инструментария анализа длинных и краткосрочных циклов // Вестник Самарского муниципального института управления. 2015. № 2. С. 7–12.

3. Демидов В. В., Семенычев Е. В. Моделирование сезонных колебаний в экономике. Самара: САГМУ, 2012. 82 с.

4. Семенычев Е. В., Демидов В. В. Метод частотной декомпозиции при моделировании сезонной экономической динамики // Вестник Самарского муниципального института управления: теоретический и научно-методический журнал. Самара: Изд-во САГМУ, 2014. № 1 (28). С. 79–83.

5. Семенычев В. К., Семенычев Е. В. Параметрическая идентификация рядов динамики: структуры, модели, эволюция: монография. Самара: СамНЦ РАН, 2011. 364 с.

6. Семенычев Е. В., Куркин Е. И., Данилова А. А. Выбор параметров генетических алгоритмов в задачах параметрической идентификации нелинейных моделей динамики // Вестник Самарского муниципального института управления. 2013. № 1 (24). С. 130–140.

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610493 РФ. Econometric Research / В. К. Семенычев, Е. В. Семенычев, А. В. Сергеев, О. С. Маркина. Заявл. 13.12.2007; зарег. 25.01.2008.

8. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 13-е изд., исправл. М.: Наука, 1986.

Статья поступила в редакцию 05.11.2017