

Курс «Имитационное моделирование»

Н.В.Апатова

профессор, д.п.н., кафедра информационных систем в экономике

Тема 1. Информационное и имитационное моделирование, методология имитационного моделирования.

Информация и компьютерная модель. Технологические этапы построения компьютерной модели. Понятие имитации. Стохастические модели. Машинные имитационные эксперименты: формулировка проблемы, формулировка математической модели, составление программы для компьютера, оценка пригодности модели.

Образ объекта, созданный языком науки, называется **моделью**.

Объект, явление, процесс любой природы становится доступным компьютерной обработке только после представления его в виде текста над конечным алфавитом. Универсальность такого подхода заключается в абстрагировании от природы исходного воздействия; возможности перекодировки из одного конечного алфавита в другой; возможности произвольного преобразования текста, то есть замена одной цепочки данных на другую.

Информация – это сведения о некотором объекте, фиксированные средствами конечного алфавита, т.е. представленные в виде текста.

Отражение объекта средствами конечного алфавита называется его информационной моделью.

Компьютерное моделирование (или просто моделирование) - представление существующих в реальной жизни систем или процессов, которые имитируют поведение реальных систем путем варьирования условий.

Технологическая цепочка построения компьютерной модели включает этапы постановки задачи; переход от описания предметной области и поставленной в содержательных терминах, связанных с данной предметной областью, к формализованным описаниям и построению в конечном счете формального текста. т.е. информационной модели объекта; построение информационной модели процесса, т.е. алгоритма решения задачи; выбор соответствующего программного (операционная система, язык, специализированное программное средство) и аппаратного (компьютеры, периферийные устройства) обеспечения; апробации модели и оценки полученных результатов.

Существуют три способа оценки экономического решения:

1. проведение управляемого эксперимента с экономической системой;
2. проведение вычислительного эксперимента на данных прошлых лет;
3. построение модели экономической системы и оценка параметров этой модели.

Имитация – это численный метод, включающий проведение компьютерных экспериментов с математическими моделями, описывающими поведение сложных систем в течение продолжительных периодов времени.

Частный случай – это линейная модель:
$$Y = \sum_{i=1}^k Q_i X_i,$$

где: y - выходная, эндогенная переменная, x - вектор из экзогенных переменных x_i , Q_i - некоторые параметры. Y также называют реакцией, x_i - факторами.

Большинство имитационных экспериментов содержат случайные величины, т.е. являются стохастическими моделями. Этими случайными величинами человек, принимающий решение может управлять либо в малой степени, либо вообще не управлять.

$$Y = \sum_{i=1}^k Q_i X_i + \varepsilon$$

Функция плотности вероятностей случайной величины ε задана в виде $f(\varepsilon, \mu)$, где μ - вектор параметров распределения.

Модель можно различными способами усложнять, вводя случайные величины, каждую со своим весом и своей функцией распределения. Как правило, в имитационных моделях вводится зависимость от времени. Можно ввести различные ограничения, а также признаки отсутствия или присутствия тех или иных значений в различные промежутки времени.

Под **имитационным экспериментом на компьютере** с моделями экономических систем понимают процедуру, состоящую из 6 этапов:

1. формулировка проблемы;
2. формулировка математической задачи;
3. составление программы для компьютера;
4. оценка пригодности модели;
5. планирование эксперимента;
6. обработка результатов эксперимента.

Формулировка проблемы - это ясное изложение целей эксперимента. Эти цели обычно формулируются либо а) в виде вопросов, на которые надо ответить; б) гипотез, которые надо проверить; в) воздействий, которые надо оценить.

Формулировка математической модели. Математическая модель связывает эндогенные переменные системы с ее управляющими и экзогенными переменными. Построение математической модели начинается с выбора переменных. Эндогенные переменные определяются в процессе формирования целей исследования. Например для социально-экономической модели города эндогенные переменные – это доход на душу населения, занятость, уровень образования и преступности, распределение населения по возрастам и т. д. Трудности возникают при выборе входных (экзогенных и управляющих) переменных, воздействующих на выходные.

При **проверке адекватности** модели решаются следующие задачи:

1. Нет ли в модели несущественных переменных, которые не улучшают нашу способность предсказывать поведение эндогенных переменных нашей системы?
2. Все ли существенные экзогенные переменные включены в модель?
3. Правильно ли сформулированы функциональные связи?
4. Верно ли оценены параметры модели и уравнений движения?
5. Являются ли оценки параметров модели статистически значимыми?
6. В какой степени совпадают теоретические величины эндогенных переменных, полученные на основании счета, с прошлыми или фактическими значениями эндогенных переменных?

Составление программы для компьютера включает написание программы, организация ввода данных, генерация недостающих данных.

В имитационном эксперименте вычисляется траектория развития системы, поэтому важным является вопрос о начальных значениях переменных и параметрах модели.

При генерировании случайных величин, имеющих различные функции распределения, используются равномерно распределенные случайные величины $r, (0 \leq r \leq 1)$. В компьютере такие числа генерируются и называются псевдослучайными.

Самым простым непрерывным распределением является распределение с функцией вероятностей, постоянной на интервале $(a;b)$ и равной 0 вне его. Эта функция плотностей вероятностей определяет равномерное или прямоугольное распределение. Для имитации равномерного распределения на $(a;b)$

Оценка пригодности модели осуществляется по следующим критериям: в какой степени имитированные величины эндогенных переменных совпадают с известными за прошлые периоды времени данные (если точно такие имеются); насколько точны предсказания имитационной модели относительно поведения реальной системы в будущем?

Планирование эксперимента включает определение значений факторов (затраты на рекламу, используемая рабочая сила, затраты капитала) и реакции (выпуск продукции, доход, полезность). Большая часть понятий теории планирования эксперимента основана на следующей классификации факторов: управляем ли рассматриваемый фактор; наблюдаемы ли значения (уровни) фактора; составляет ли влияние фактора предмет изучения или он включен для увеличения точности эксперимента; являются уровни фактора количественными или качественными; является фактор фиксированным или случайным.

Результатом больших имитационных экспериментов являются количественные характеристики или средние некоторых распределений, например среднего уровня доходов. Чем больше выборка, большая вероятность того, что выборочные средние будут близки к средним распределений.

Сходимость выборочных средних с ростом объема выборки называется *стохастической сходимостью*.

Тема 2. Экономические модели и статистические методы.

Экономические данные и их зависимость. Этапы обработки дискретных случайных величин. Основные характеристики случайных величин. Распределение и взаимосвязи случайных величин в экономике.

Основным элементом экономического исследования является анализ и построение взаимосвязей экономических переменных. Изучение таких взаимосвязей осложнено тем, что они, особенно в макроэкономике, не являются строгими функциональными зависимостями. Это обусловлено следующим: всегда очень трудно выявить все основные факторы, влияющие на данную переменную; многие воздействия являются случайными; экономисты, как правило, располагают ограниченным набором данных статистических наблюдений, которые к тому же содержат разного рода ошибки.

Экономические данные делятся на два вида: перекрестные данные (cross – section data) и временные ряды (time series) *Перекрестные данные* -- это данные по какому либо экономическому показателю, полученные для разных однотипных объектов (фирм, регионов). При этом либо все данные относятся к одному и тому

же моменту времени, либо их временная принадлежность несущественна. *Временные ряды* – это данные, характеризующие один и тот же объект но в разные моменты времени.

Статистические данные – набор наблюдаемых значений одной или нескольких переменных, характеризующих изучаемое явление или рассматриваемый экономический объект. Обработка статистических данных включает следующие этапы: упорядочивание по возрастанию, вычисление разности между \max и \min (размах выборки); подсчет частот, с которыми встречаются различные элементы выборки; (абсолютная частота или просто частота, относительная частота, накопленные частоты).

Основные характеристики случайных величин являются среднее значение (математическое ожидание), дисперсия, стандартное отклонение случайной величины, коэффициент вариации.

При построении экономической модели возникает проблема ее совместимости с реальными экономическими данными. Различают 2 уровня анализа : теоретический и эмпирический.

На теоретическом уровне предполагается, что известны все возможные реализации экономических показателей – т.е. вся генеральная совокупность. Зная или предполагая свойства генеральной совокупности, можно теоретически определить значения параметров в модели рассчитать по ней нужные экономические показатели. Но на практике наблюдаются только случайно выбранные значения интересующих показателей. Располагая только такими данными, параметры нельзя определить точно, а можно только оценить. Существует 2 класса оценок: оценки вида распределения и оценки его параметров.

В этих условиях единственным способом построения искомой оценки может быть нахождение такой функции выборочных данных, которая с наибольшей точностью аппроксимирует оцениваемую характеристику генеральной совокупности.

При обработке выборочных данных важно знать, каким вероятностным законам они подчиняются. Существует три эталонных распределения вероятности: равномерное, нормальное (распределение Гаусса), распределение Стьюдента (t – распределение).

Тема 3. Эмпирические формулы. Соотношения между экономическими требованиями.

Понятие об эмпирических формулах. Линейная регрессия. Анализ статистической значимости коэффициентной линейной регрессии. Множественная линейная регрессия. Проверка общего качества уравнения регрессии.

Если не принимать во внимание стохастическую природу экономических данных, то для описания взаимосвязей различных экономических и финансовых показателей между собой применяется функциональный подход.

Связь одного показателя с другим описывается с помощью функции одной переменной $y = f(x)$ или функции нескольких переменных: $y = f(x_1, \dots, x_n)$. Такой подход применяется там, где вероятностный характер экономических процессов малозначителен для принятия решения. Зависимость может быть строгой (функциональной) или статистической.

Простейшей формой зависимости между переменными является линейная зависимость. При исследовании такой связи надо ответить на два вопроса:

1. Связаны ли между собой линейные переменные x и y ?
2. Какова формула этой связи?

Т. е. надо подтвердить формулу $y = ax + b$ и вычислить a и b .

Для ответа на первый вопрос вычисляется коэффициент корреляции, во втором случае – коэффициенты линейной регрессии, их стандартные оценки и t – статистика.

На практике мы часто связываемся с **задачей о сглаживании** экспериментальных зависимостей. Сгладить экспериментальную зависимость означает по возможности точно отразить общую тенденцию зависимости y от x , исключив при этом случайные отклонения.

Формулы, служащие для представления опытных данных, называются **эмпирическими формулами**.

При нахождении эмпирической формулы необходимо, во-первых, определить вид зависимости, (линейная, квадратичная, логарифмическая или другая) и, во-вторых, определить неизвестные параметры функции.

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному **методу наименьших квадратов**: в качестве неизвестных параметров $f(x)$ выбирают такие, чтобы сумма квадратов отклонений этой функции в соответствующих точках минимально отличалась от опытных значений, т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min, \text{ где } \delta - \text{невязка или}$$

отклонение.

Если в качестве $y = f(x)$ взята линейная функция, то задача сводится к описанию таких параметров a и b , для которых $S = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ принимает наименьшее значение. Где x_i и y_i постоянные числа из эксперимента, параметры a и b неизвестные величины.

Т. к. $S = S(a, b)$ - функция двух переменных, то \min она достигнет, когда

$$S'_a = 0 \text{ и } S'_b = 0 \text{ или } \begin{cases} \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sum_{i=1}^n x_i^2) \cdot a + (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot b = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ (\sum_{i=1}^n x_i) \cdot a + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} .$$

Эта система имеет единственное решение, т.к. ее определитель $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2 .$$

Пример : Имеются следующие данные о цене на нефть- x (ден. ед) и индекс акций нефтяных компаний y (усл.ед) (показатель курса важнейших акций на бирже):

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Предполагая, что между x и y существует линейная зависимость, найдем формулу вида $y = (ax + b)$. В результате, получив необходимые для расчетов суммы $\sum x_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i y_i$, $\sum x_i^2$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 1988,5209a + 109,13b = 59847,06 \\ 109,13a + 6b = 3288 \end{cases}$$

$$y = 12,078x + 328,32,$$

таким образом с увеличением цены нефти на 1 ден.ед. индекс акций нефтяных компаний в среднем растет на 12,08 ед.

Величины y_i , соответствующие данным x_i , при некоторых теоретических значениях α и β , являются случайными. Следовательно, являются случайными и рассчитанные по ним коэффициенты a и b . Как случайные величины, они также могут иметь дисперсии случайных отклонений.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n - p - 1}, \quad \text{где } p - \text{ число факторов (для линейного}$$

случая это одна переменная, $p = 1$).

Формально значимость коэффициента регрессии a может быть проверена с помощью анализа его отношения к своему стандартному отклонению. $t = \frac{a}{S_a}$. Это t – статистика (с $(n - 2)$ степенями свободы).

$$\text{Для нашего примера } S_a^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2}{(n - 2)(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2))}; \quad S_a \approx 0,0086; \quad t \approx \frac{12,078}{0,009} \approx 1398$$

супернадёжно. Если t - статистика в этом случае по модулю меньше 1, то оценка незначима. Она надёжна, если $|t| > 3$.

На экономические величины влияют обычно не один, а несколько факторов. В таком случае $y = f(x)$ означает, что x — вектор, содержащий m — компонентом $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Функция имеет вид: $y = f(\alpha, x) + \varepsilon$, где α — вектор параметров, ε — случайная ошибка. Как в случае с линейной регрессией, предполагается, что ошибки ε , являются случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и нормально распределены.

Теоретическое уравнение множественной линейной регрессии имеет вид:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m + \varepsilon$$

где: $a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}y_i$ — коэффициент уравнения

Если имеется n наблюдений, то $n \geq m + 1$. Если $n = m + 1$, то решается система из n уравнений с n неизвестными.

Если $n > m + 1$, то нельзя точно подобрать формулу, а можно выбирать наилучшую формулу — приближение для имеющихся наблюдений. Положительная разность $(n - m - 1)$ числом степеней свободы. Если она мала, то формула ненадежна.

Обычно при оценке множественной регрессии для обеспечения статистической надежности требуется, чтобы число наблюдений по крайней мере в 3 раза превосходило число оцениваемых параметров.

Если число степеней свободы достаточно велико (8-10), то при 5% уровне значимости и двусторонней альтернативной гипотезе критическое значение t — статистики примерно равно 2. Критерии задаются, как и для линейного случая.

Анализ качества построенного уравнения состоит из трех этапов статистического анализа и содержательного экономического:

- 1) проверки статистической значимости каждого коэффициента уравнения регрессии;
- 2) проверки общего качества уравнения регрессии;
- 3) проверки свойств данных, полученных в процессе анализа.

Под содержательной составляющей анализа качества понимается рассмотрение экономического смысла оцененного уравнения регрессии:

- 1) действительно ли значимыми оказались объясняющие факторы;
- 2) положительны или отрицательны коэффициенты, показывающие направление воздействия этих факторов;
- 3) попали ли оценки коэффициента регрессии в предполагаемые из теоретических соображений интервалы.

Проверка общего качества уравнения регрессии.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - a - bx_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}; \quad R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m))^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2};$$

2. F — статистика. Критерий Фишера.

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} \quad \text{для линейной} \quad F = \frac{R^2(n - 2)}{1 - R^2}.$$

При этом проверяется нулевая гипотеза для F – статистики. Она заключается в следующем: если коэффициенты уравнения, кроме свободного члена, равны нулю, то $R^2 = F = 0$. Логика проверки нулевой гипотезы заключается в том, что если произошло событие, которое было бы слишком маловероятным в том случае, если данная гипотеза действительно была бы верна, то эта гипотеза отвергается. R^2 и F или равны нулю одновременно или нет.

С помощью F – критерия можно исключить ряд факторов из уравнения регрессии.

Критерий Фишера может также рассчитываться: $F = \frac{S_y^2}{S_{ост}^2}$.

Если F – статистика достигает или превосходит границу значимости, то гипотезу о линейности нужно отбросить.

Число степеней свободы в числителе $\nu_1 = n - 1$ и в знаменателе $\nu_2 = n - p - 1$, где n – число опытов, p – число факторов.

$$a_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i \quad \text{– коэффициент уравнения}$$

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

Дисперсия; дисперсия воспроизводимости значения t – статистик имеет вид:

$$t_j = a_j \sqrt{\frac{n}{S_y^2}}$$

Тема 4. Модели теории управления предприятием.

Свойства численных моделей. Модели Марковских цепей. Модели массового обслуживания. Модели управления запасами. Производственные модели. Модели торговли. Финансовые модели. Модели корпораций.

Модель – это абстракция некоторой реальной системы, которая применяется для прогнозирования и управления.

Математические модели экономической системы включают 4 элемента: компоненты, переменные, параметры и функциональные связи. **Компоненты** – это модели различных подсистем рассматриваемой экономической модели. Они могут быть разнообразными в зависимости оттого, что моделируется: экономика страны, отрасли, фирмы, или подразделения фирмы. Например, секторы экономики – частный, государственный, сектор домашних хозяйств – сами могут быть компонентами в макроэкономических моделях. **Переменные** вводятся для описания связей между компонентами. Они подразделяются на эндогенные, экзогенные, переменные состояния и управления. **Эндогенные** – зависимые, выходные переменные. Каждому выходу модели должно соответствовать одно уравнение. Например, для фирмы эндогенные переменные – это затраты, выпуски, продажи и прибыли. **Переменные состояния** могут быть частью эндогенных. Они явно не входят в отношения, а вводятся для полного описания модели. Они могут быть промежуточными переменными. **Экзогенные и переменные управления** – это входные данные системы. К управляющим относятся те переменные, которые могут определяться управляющим органом системы в зависимости от выбранной стратегии. Например, управлениями экономики страны могут быть денежная и налоговая политики; а в качестве управлений фирмы – интенсивность производства и используемая рабочая сила. **Функциональные связи** – это

тождества и уравнения. Тождества часто принимают вид определений. Тождествами являются : определение прибыли фирмы в виде разности полных доходов и полных затрат; равенство актива фирмы сумме ее чистого капитала и кредитов, которыми она располагает. **Уравнения** называют также характеристиками системы. Параметры получают только на основе статистических выводов.

Простейший пример численной модели, применяемой в теории управления предприятием, дает **Марковская цепь**. Марковский процесс протекает в дискретном времени и описывается конечным набором состояний, в которых он может находиться.

Вероятность того, что в данный момент времени процесс попадет в состояние $j(j = 1, \dots, \mu)$ зависит только от его состояния $i(i = 1, \dots, \mu)$ в предыдущий момент времени. Марковская цепь полностью описывается переходной матрицей P , элемент которой p_{ij} - это вероятность перехода за один такт из состояния i в состояние j :

Модели Марковских цепей применяются для имитации потребительского спроса в задачах планирования торговли. При этом отдельным состояниям процесса соответствуют различные структуры предпочтения на однородную продукцию разного качества.

Для многих промышленных систем характерен поток входных требований (заявок), поступающих на одну или несколько станций (блоков) **обслуживания** и образующих очередь. Заявками могут быть производственные и торговые заказы, заявки на ремонт, посадку самолетов в аэропорту и заправку автомобилей на заправках. Часто интервалы времени между последовательными заявками и продолжительности их обслуживания являются случайными величинами.

С точки зрения экономической теории проблема очередей сводится к балансированию предельных потерь, связанных с ожиданием в очереди и простым оборудованием системы.

В одноканальной однофазовой модели массового обслуживания система состоит из одной станции, на которую поступают заявки, образующие очередь.

Экзогенные переменные: \overline{WT} - среднее время ожидания заявки в очереди.
 \overline{IDT} - среднее время простоя системы в ожидании очередного требования.

Переменные состояния: WT_i - время ожидания i - заявки, $i = 1, 2, \dots, m$;
 IDT_i - время простоя системы в ожидании i - заявки.

Эндогенные переменные: AT_i - интервал времени между появлением i -ой и $(i+1)$ -ой заявками, $i = 1, 2, \dots, m$.

ST_i - время обслуживания i -ой заявки.

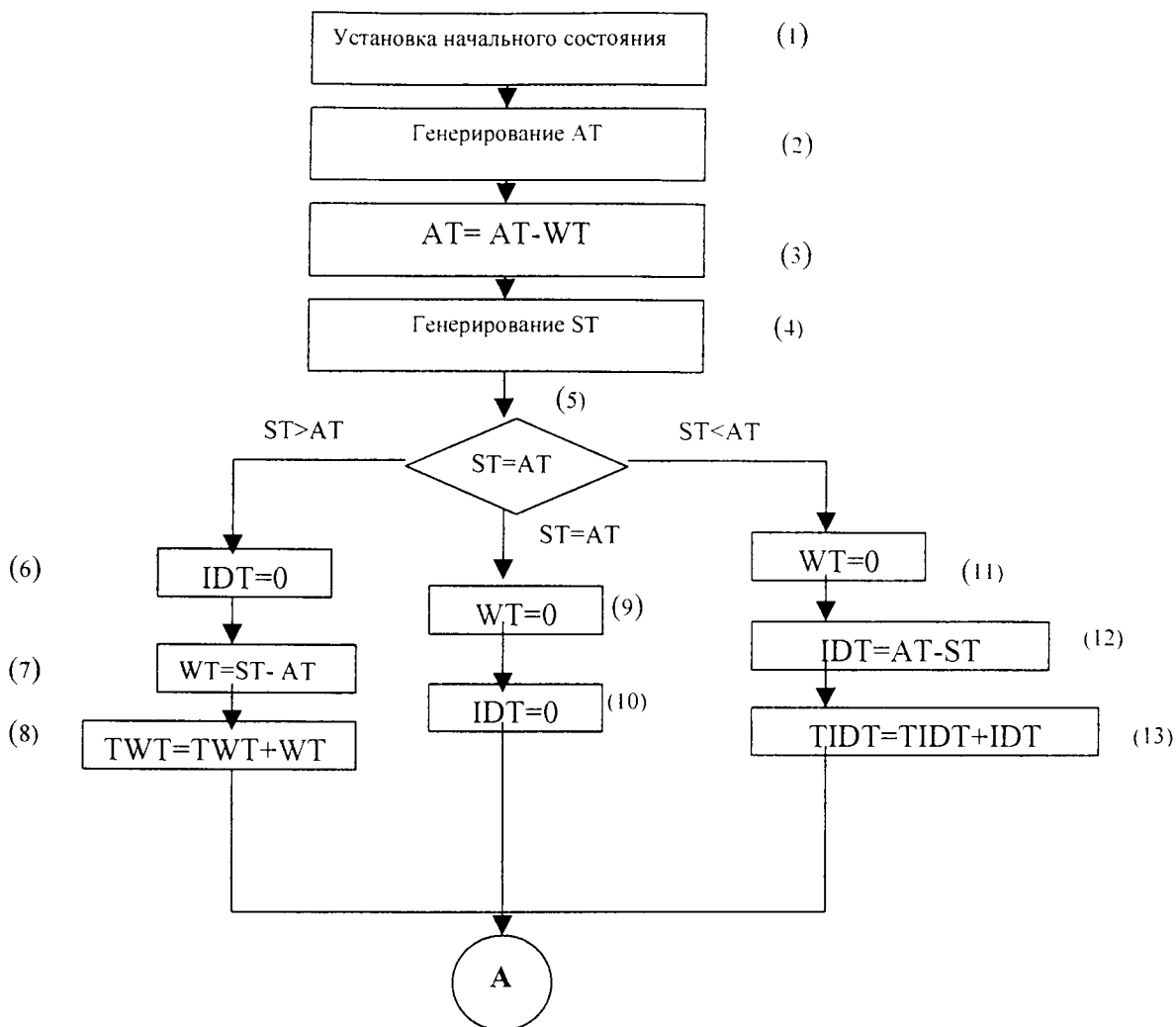
Характеристики функционирования системы.:

$f(AT)$ - функция распределения плотностей вероятностей интервала времени между двумя последовательными заявками.

$f(ST)$ - функция распределения плотности вероятностей времени обслуживания.

$$\text{Тождества: } \overline{WT} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m WT_i = \frac{iWT}{m}; \overline{IDT} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m IDT_i = \frac{IFDT}{m}$$

Блок-схема расчетов по одноканальной однофазовой модели:



В (1) обнуляется время появления первой заявки, время ее ожидания, время простоя системы в ожидании ее прихода, а также полные времена ожидания и простоя. Тем самым устанавливается начальное состояние системы и фиксируется факт появления первого требования.

(2) генерируется относительное время появления новой заявки. Оно отсчитывается от момента появления предыдущего требования.

(3) разность определяет новое значение относительно времени прибытия новой заявки. Его отсчет ведется от момента начала обслуживания предыдущей заявки.

(4) генерируется продолжительность обслуживания. Если оно больше времени появления новой, то придется постоять в очереди (6). Если меньше, то возникает простой (11).

(6) система не бездействует, $IDT=0$.

(7) время ожидания нового прихода WT – это разность между продолжительностью обслуживания предыдущей заявки и относительным временем ее появления.

(8) пересчет полного времени ожидания.

(11) заявке ждать не надо, $WT=0$.

(12) вычисляется продолжительность простоя.

(13) пересчет полного времени простоя.

(9) нет ожидания, как следствия.

(10) нет простоя.

Под **производством** в экономической теории понимается преобразование затрачиваемой продукции (затрат) в выпускаемую продукцию (выпуск) в соответствии с заданной технологией. Оно описывается векторами затрат и выпуска, а также производственно-технологическим множеством (v_i - вектор затрат; u_i - вектор выпуска, $y_i = (v_i, u_i)$ - технологическое множество или множество производственных возможностей элемента). Размерность векторов затрат и выпуска равны количеству видов затрачиваемой и выпускаемой продукции.

Функционирование производственного элемента предполагает присутствие четырех факторов:

1. Основные производственные фонды (оборудование, производственные площади и т.д.).

2. Поставки сырья (продукция, производимая другими элементами экономики) импорт из других стран, продукция других отраслей и заводов; продукция смежных цехов или производственных участков).

3. Наличие и потребление природных ресурсов (вода, воздух, лес, полезные ископаемые). Некоторые производственные элементы могут вообще не использовать непосредственно природные ресурсы, потребляя лишь продукцию, производимую другими элементами.

4. Труд или рабочая сила.

Таким образом вектор затрат $v = (v'', v')$, где v'' - вектор натуральных показателей, характеризующий поставки сырьевой продукции; v' - показатели, характеризующие потребляемый труд.

Функция $v_i(v_i)$, задающая максимальный уровень выпуска при каждом уровне затрат, называется **производственной функцией**. В качестве выходной переменной в производственной функции чаще всего выступает валовой (конечный) продукт производственного элемента (отрасли, предприятия и т.д.), а компонентами вектора затрат выступают величины затрат труда и ресурсов, используемых в процессе производства.

Наибольший интерес с точки зрения моделирования представляет степенная производственная функция, частный вариант которой с двумя видами затрат впервые использовали К. Кобб и П. Дуглас применительно к макроэкономическим исследованиям. Используемая ими производственная функция имела вид $v(v) = \alpha_0 v_1^\alpha v_2^{1-\alpha}$, где в качестве выпуска выступал валовой национальный доход, а в качестве затрат – затраты труда и затраты капитала.

Примером **производственной модели** может служить модель стоимости (по К. Марксу).

Пусть q_i – стоимость единицы товара в отрасли номера i ; r_i - труд, вложенный в товар; a_{ij} - количество товара номера j , который использован для производства товара номера i (если товар номера k не используется для производства товара номера i , то $a_{ik} = 0$). Тогда стоимость материалов,

использованных для производства товара номера i , будет: $\sum_{j=1}^N a_{ij} q_j$, где N – общее число товаров, производимое обществом.

Полная стоимость товара номера i : $q_i = r_i + \sum_{j=1}^N a_{ij} q_j$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Это система уравнений, где q_i неизвестное. Решаем ее и находим q_i .

Усложним модель: будем считать, что имеется k видов труда и через r_{ij} обозначается количество труда номера j , затраченного на производство товара номера i . Пусть λ_j - коэффициент производства товара номера i , пусть λ_j - коэффициенты, соизмеряющие труд разных квалификаций. Тогда $r_i = \sum_{j=1}^k r_{ij} \lambda_j$, т.е.

$$q_i = \sum_{j=1}^N a_{ij} q_j + \sum_{j=1}^k r_{ij} \lambda_j.$$

Еще более сложно: будем считать с учетом ресурсов, в т.ч. затрат на подготовку специалиста данной (λ_j) квалификации.

Основной частью многих **моделей торговли** является блок имитации поведения потребителей и спроса. Модель торговли корпорации Анхойзер-Буш предназначена для прогнозирования спроса на пиво. Спрос зависит от потребления пива на одного пьющего и от доли последних в общей численности населения. Потребление пива на одного пьющего зависит от реального дохода на душу населения и сложившихся традиций его распределения. Выходом модели является прогноз спроса на пиво на текущий год.

В **модели корпорации** все виды деятельности рассматриваются как единое целое: производство, торговля и финансы. В моделях корпораций блок распределения заказов между фирмами, а также финансовые, производственные и управляющие подсистемы рассматриваются в единой неразрывной связи друг с другом.

Модель корпорации Анхойзер – Буш содержит 10 различных подмоделей и предназначена для описания материальных и денежных потоков в том отделении корпорации, которая занимается производством пива. Модель была реализована на IBM 1130. Ее разработка и внедрение обошлось в 100 тыс. \$ и потребовало 5,5 человеко- лет рабочего времени.

Финансовая модель корпорации САН - ОЙЛ, создана Дж. Гершевским. моделирует финансовые отношения. она была создана для обеспечения руководства компании быстрым и надежным методом показания финансового положения компании на основе прогноза некоторых условий.

Модель применяется для корректировки финансовых планов во всех случаях, когда возникают существенные изменения параметров, определяющих функционирование компании, а также для составления долгосрочных производственных планов и разработки бюджетов.

В модель входит 1500 переменных, описывающих ежегодное состояние дел. в ней рассматриваются следующие типы величин: цены и объемы выпускаемой продукции; затраты на сырье; параметры общего состояния экономики: инвестиции; планируемые статьи расходов.

Выходная информация содержит следующие данные: бюллетень доходов корпорации; диаграмма капиталовложений: источники и распределение денежных средств; ведомость заработной платы и доля акцизов в средствах корпорации: налоговый отчет; анализ рентабельности: финансовый и производственный отчеты.

Финансовая модель корпорации САН – ОЙЛ содержит более 2000 условий, из которых 60 получены регрессионным анализом. Все условия разбиты на группы блоков или процедур. Каждый блок представляет отдельный аспект деятельности компании. Ему соответствует определенная вычислительная процедура, описывающая реально выполняемые в фирме операции.

Тема 5. Модели экономических систем.

Модели фирмы. Модели конкурентной отрасли. Модель дуополии. Модель теории функционирования фирмы. Модель олигополии. Проблемы имитационного моделирования фирмы. Отраслевые модели. Макроэкономические модели.

Простейшей экономической **моделью взаимодействия фирмы и рынка** является так называемая «паутинообразная модель». В ней предполагается, что спрос на некоторый продукт (чаще всего рассматривается сельскохозяйственная продукция) на заданном отрезке времени зависит от его цены (и других факторов) на этом отрезке. Предложение определяется ценами предыдущего периода времени. В этой модели предполагается, что рынок находится в условиях локального равновесия.

Примером **модели конкурентной отрасли** является модель, в которой отрасль состоит из трех конкурирующих фирм, которые через фиксированные отрезки времени планируют свои текущие объемы производства и реализации. Таким образом, выпуск фирмы на каждом элементарном отрезке времени является управляемой величиной. Конкретные значения управлений администрация каждой фирмы может выбирать, руководствуясь своими неформальными соображениями и выбор этот не подчиняется никаким математическим соотношениям. Тем не менее, модель учитывает, какой информацией располагает фирма при выборе этих управлений. После того, как каждая фирма на основе располагаемых ею данных принимает решение относительно своего производства на текущий период, все выпуски складываются и полученная сумма определяет полный выпуск отрасли на данном отрезке времени.

Модель дуополии рассматривает отрасль, состоящую из двух фирм (модель Курно). В этой модели две фирмы, производящие одинаковую продукцию, стремятся получить максимум прибыли. Эндогенными переменными модели являются выпуски каждой фирмы, суммарный выпуск отрасли, рыночная цена на данном отрезке времени и прибыли каждой фирмы.. Экзогенная переменная – случайная величина, от которой также зависит прибыль.

Модель олигополии обобщает модель дуополии и отражает попытку построения и анализа общей теории формирования цен и выпусков в отрасли, состоящей из нескольких фирм.

Модель теории функционирования фирмы описывает процесс принятия решений в организации, причем особое внимание уделяется планированию цен, выпусков и распределения ресурсов. Теория функционирования фирмы включает 4 раздела: теорию целей организации, теорию поиска возможностей, теорию выбора и теорию управления организацией. В качестве примера рассматривается модель универсального магазина.

Моделирование отрасли описано разработанной в начале 60-х годов в США моделью текстильной промышленности. Эндогенными переменными модели являлись: месячный объем розничной торговли одеждой, индекс производства готового платья, месячный объем реализации продукции текстильных фабрик,

индекс производства текстильных фабрик, количество рабочих, занятых в текстильном производстве, средний еженедельный заработок рабочего, индекс цен на текстиль и одежду, квартальная чистая прибыль текстильных предприятий после уплаты налогов, квартальные капиталовложения отрасли в новые фабрики и оборудование. Экзогенные переменные – это месячный доход населения, индекс розничных цен на товары потребления, месячные затраты торговых фирм на рекламу одежды, запасы готового платья в магазинах, индекс производства товаров длительного пользования, отношение запасов продукции текстильных фабрик к объему текущих заказов на ее поставку, индекс цен на шерсть. Модель представляет собой систему рекуррентных уравнений.

Макроэкономическое моделирование показано на примере модели денежного обращения США. 17 уравнений модели объясняют поведение 6 промежуточных ориентиров: средств обращения, бессрочных вкладов, срочных вкладов, процентных ставок по государственным облигационным займам и по закладным на жилые строения, а также количества закладных. Остальные 10 уравнений модели объясняют поведение переменных «состояния», необходимых для понимания воздействия денежной политики на ориентиры. В основном это краткосрочные ориентиры на денежном рынке: резервы банков, объем коммерческих ссуд, активы в виде федеральных ценных бумаг и процентные ставки краткосрочного кредита. Модель использует и другие данные и рассматривает три варианта денежной политики.

Тема 6. Модели экологических систем.

Динамические и статистические модели экологических систем. Математическое моделирование экологических ситуаций. Оценка риска техногенных аварий и катастроф. Статистическая интерпретация экологического мониторинга. Прогнозирование экологических ситуаций.

Насыщение производства современной техникой повысило число происходящих техногенных катастроф, аварий, каскадных отказов в энергоемких системах и др. Из крупнейших промышленных аварий свыше половины произошло в течении последних десятилетий, в том числе одна треть - за последние 15 лет.

Для выбора адекватных мер предупреждения катастроф и аварий необходима научно-методическая база количественной оценки риска их появления, необходим постоянный анализ аварийных случаев (катастроф), выявление статистических закономерностей их появления и взаимосвязи этих закономерностей и причин, обусловленных нормативными документами, сопровождающими все этапы жизненного цикла системы (проектирование, производство, эксплуатация и др.). Оценка риска необходима для разработки управляющих решений и выбора способов и средств защиты (профилактических мероприятий), минимизации риска и др.

В объективно существующих условиях неопределенности представляется целесообразным теоретико-вероятностные схемы оценки риска аварий и катастроф и других таких событий в экологии строить на основе информационно-статистических методов.

Наиболее распространенной моделью редких событий является распределение Пуассона.

Ограниченный объем исходной информации и, как правило, отсутствие априорных сведений о виде законов распределений экологических параметров делают невозможным формальное применение традиционных методов получения их оценок.

Это обстоятельство требует привлечение нового подхода к проблеме статистического точечного оценивания, базирующегося на непараметрических методах математической микроэкономической статистики, использование эмпирической функции распределения и применения принципа максимума неопределенности. Применение такого подхода и аналитического аппарата построения статистической процедуры получения точечных оценок позволило назвать этот метод методом квантилей экстремального распределения.

Следует заметить, что большинство методов, ориентированных на прогнозирование экологических ситуаций, требуют в той или иной степени учета фактора старения используемой информации. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть статистические закономерности старения предпрогнозной информации. Всякой информации присуще свойство старения. С течением времени происходит частичная или полная потеря ценности для ее потребителя. Ценность информации - понятие достаточно широкое и требует конкретизации и уточнения применительно к рассматриваемой проблеме. С появлением новой информации возникает необходимость уточнить и по-новому интерпретировать изменившийся прогнозный фон для прогнозных исследований.

Литература

1. Т.Нейлор. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. - М.: Мир, 1975
2. Ю.П.Иванов, А.В.Лотов. Математические модели в экономике. - М.: Наука, 1979.
3. И.В.Максимей. Имитационное моделирование на ЭВМ. - М.: Радио и связь, 1988.
4. Л.З.Румшинский. Элементы теории вероятностей. -М.: Наука, 1966.
5. Е.Н.Львовский. Статистические методы построения эмпирических формул. -М.: Высшая школа, 1988.
6. Исследование операций: В 2-х томах. Пер. с англ./ Под ред. Дж. Моудера, С.Элмаграби. - М.: Мир, 1981. Т.2. Модели и применение.
7. M. Janssen. Modelling Global Change. The art of integrated assessment modelling. USA, E.Elgar, 1998.
8. C. Perrings. Economics of ecological resources. Selected Essays. USA, E.Elgar, 1996.
9. J.C.M. van der Bergh, J. van der Straaten/ Economy and Ecosystems in Change. USA, E.Elgar, 1997.
10. Economic-Ecological Modeling. Ed. L.C. Braat, W.F. van Lierop. Elsevier Science Publisher, 1991, Amsterdam.