Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
Серия «Экономика». Том 15 (54). 2002 г. №2. С. 62-69.

УДК 330.4

Рыбников А.М., Рыбников М.С.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЧИСЛЕННОСТИ ПРОФЕССОРСКО-ПРЕПОДАВАТЕЛЬСКОГО СОСТАВА ВУЗА

Для всех Вузов типична ситуация, когда профессорско-преподавательский состав поделен на четыре категории: ассистенты ($i=1$), старшие преподаватели ($i=2$), доценты ($i=3$), профессора ($i=4$).

При этом общее число бюджетных ставок на протяжении достаточно длительных периодов времени остается постоянным, а качественный состав меняется достаточно быстро. Дело в том, что преподаватели из нижних категорий по достижению определенного опыта и (или) в случае защиты соответствующей диссертации переходят в более высокие категории. Поэтому при неизменном количественном составе меняется его качество, что, в свою очередь, ведет к увеличению расходов на заработную плату. Это ставит перед администрацией Вуза вопрос о том, что делать, чтобы рост прекратился или даже наоборот наблюдалась тенденция к снижению расходов на заработную плату.

Введем следующие обозначения для года T:

– $n_i(T)$ - число штатных единиц преподавателей в категории i $(i=\overline{1,4})$.

– $n_{ij}(T)$ - число преподавателей, перешедших из категории i в категорию j.

– $n_{i5}(T)$ - число преподавателей, уволившихся, умерших, перешедших на другую работу или вышедших на пенсию из категории i.

– $n_{0i}(T)$ - число преподавателей, принятых на работу в категорию i извне.

Тогда в год $T+1$ изменение количественного состава категории j в сравнении с годом T можно описать уравнением

$$n_j(T+1)=n_{0j}(T+1)+\sum_{i=1}^{4}n_{ij}(T). \tag{1}$$

Модель, представленная равенством (1), является достаточно упрощенной и поэтому она не будет адекватно отражать характеристики реальной экономической системы. Следовательно, ее необходимо дополнить некоторыми предположениями о поведении этой системы, которые сделают модель более реальной. Вносимые предположения будем считать гипотезами, справедливость которых подтверждается практикой. Это следующие гипотезы:

1. При достаточно широких предположениях можно считать, что отношение числа преподавателей, перешедших в другие категории из данной, к численности категории есть величина постоянная или $\frac{n_{ij}(T)}{n_i(T)} = const$.

2. Приведенная формула справедлива с точностью до статистических колебаний. Пусть p_{ij} - вероятность перехода преподавателя из категории i в категорию j, а w_j - вероятность ухода преподавателя из Вуза. Тогда $\sum_{i=1}^{4} p_{ij} + w_j = 1$ (2) для каждого преподавателя. При допущении (2) число переместившихся преподавателей есть случайная величина с биномиальным законом распределения вероятностей. В результате ожидаемый поток преподавателей есть $n_i(T)p_{ij}$, что соответствует утверждению о том, что поток пропорционален запасам.

3. Если штатное расписание неизменно, то суммарное число преподавателей, набранных со стороны, равно числу уволенных, вышедших на пенсию и естественно выбывших. Обозначим $R(T+1)$ - вектор набора преподавателей в год $T+1$ и $G(T+1) = \sum_{i=1}^{4} n_{i5}(T)$. (3) Пусть r_i - доля от G для i- ой категории преподавателей.

Тогда $R = (r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4)$ и при этом все $r_i \geq 0$, а также $\sum_{i=1}^{4} r_i = 1$.

Так как все величины, введенные выше, носят случайный характер имеет смысл говорить об ожидаемых величинах, т.е. об их математических ожиданиях. Обозначим через $M(n_{ij}(T)) = n_i(T)p_{ij}$ ожидаемый поток (математическое ожидание потока). При этом величина $n_i(T)p_{ii} = M(n_i(T))$ определит число преподавателей, оставшихся в i категории.

Тогда для (1) получим

$$\overline{n_j}(T+1) = \sum_{i=1}^{4} n_i(T)p_{ij} + r_j \sum_{i=1}^{4} n_i(T)w_i . \qquad (4)$$

Перейдем к матричной форме записи, для чего введем в рассмотрение следующие матрицы и векторы:

– $\bar{n}(T+1)$ - вектор математических ожиданий с элементами $M(n_j(T+1))$;
– $n(T)$ - вектор персонала;
– P - матрица вероятностей переходов из категории в категорию с элементами p_{ij};
– R - вектор долей наборов в категории с элементами r_i;
– W - вектор увольнений и уходов с элементами w_i.

Тогда (4) можно записать в виде $\bar{n}(T+1) = n(T)Q$, где $Q = P + W^T R$.

Таким образом, в матричном виде ожидаемое количество преподавателей в год $T+1$ в сравнении с годом T определится уравнением

$$\bar{n}(T+1) = n(T)Q. \tag{5}$$

Тогда, очевидно, что в год $T+N$ из (5)

$$\bar{n}(T+N) = n(T)Q^N. \tag{5'}$$

Матрица Q является стохастической матрицей, представляющей все возможные переходы из одной категории преподавателей в другие. Все ее элементы неотрицательны и суммы элементов каждой строки равны единице в силу формулы (2) и следствия из формулы (3).

Рассмотрим прогноз качественного изменения профессорско-преподавательского состава, например, в $T+5$ год в сравнении с годом T. Для этого определим все величины, входящие в (5). Вместо вектора $n(T)$ введем вектор долей структуры профессорско-преподавательского состава $X(T) = \frac{n(T)}{N}$, где N – суммарное число всех штатных единиц.

Вектор W, учитывающий уход из Вуза по разным причинам, должен обладать тем свойством, что низшая категория ($i=1$) и высшая категория ($i=4$) имеют наибольшие потери, т.к. первых не устраивает в основном уровень оплаты труда, а у вторых – высокий возраст и в результате среди них велик процент выходов на пенсию и смертей. Поэтому примем этот вектор W в виде

$$W = \begin{pmatrix}0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Прием на работу лиц со стороны осуществляется в основном в первую категорию, меньше во вторую и третью и практически равен нулю в четвертую ввиду отсутствия жилья и редких переходов профессоров из Вуза в Вуз, если последний не находится в стадии становления или бурного развития. Поэтому примем $R = \begin{pmatrix}0{,}7 & 0{,}15 & 0{,}15 & 0\end{pmatrix}$.

В дальнейшем мы покажем, что через элементы вектора R может осуществляться стратегия управления персоналом и ввиду этого конкретные значения его элементов не играют, вообще говоря, существенной роли.

Матрица P обладает тем свойством, что все ее диагональные элементы должны быть максимальны, т.к. это условия сохранения преподавателя в его категории. Все элементы этой матрицы, лежащие ниже главной диагонали, примем равными нулю, поскольку обратные переходы из высших категорий преподавателей в низшие категории хотя и не запрещены, но на практике осуществляются крайне редко, если и осуществляются вообще. Кроме того, есть «почти запрещенные» переходы, например, из первой категории в четвертую категорию. Поэтому соответствующий элемент матрицы P необходимо также считать равным нулю.

В качестве примера рассмотрим структуру, близкую к реальной вузовской структуре, которая имеет следующий вектор $X(T) = \begin{pmatrix}0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1\end{pmatrix}$.

После соответствующих расчетов получим, что через пять лет введенная структура превратится в структуру $X(T+5) = (0{,}21 \quad 0{,}16 \quad 0{,}32 \quad 0{,}31)$.

В ней число ассистентов сократилось в 2,38 раза, число старших преподавателей – в 1,25 раза, а число доцентов и профессоров выросло соответственно в 1,6 и 3,1 раза. При общей большой и неизменной численности профессорско-преподавательского состава фонд заработной платы существенно возрастет. Таким образом, расчеты показывают ухудшение состояния ввиду существенного роста численности высокооплачиваемых категорий.

Имея неблагоприятный прогноз, необходимо знать насколько все может стать неблагополучным в отдаленной перспективе. Для этого в равенстве (5') необходимо перейти к пределу при $N \to \infty$. Доказывается, что при весьма общих условиях, которые всегда будут выполнены в любой реальной постановке задачи о кадрах, предел этой матрицы существует и равен

$$\lim_{N\to\infty} Q^N = Q^\infty, \tag{7}$$

где Q^∞ - стохастическая матрица с одинаковыми строками. Процесс выравнивания элементов можно наблюдать уже на примере рассмотренных выше матриц Q и Q^5. Если q есть строка матрицы Q^∞, то, принимая $T = 0$, будем иметь

$$n(\infty) = n(0)Q^\infty = Nq. \tag{8}$$

Следовательно, имеется предельная структура преподавательского состава, которая не зависит от начальной структуры, а целиком определяется матрицей Q. Строку q можно определить из условия

$$q = qQ. \tag{9}$$

Система уравнений (9) является вырожденной. Однако если выбросить из нее одно, любое уравнение и заменить его естественным условием $\sum_{i=1}^{4} q_i = 1$, то обновленная система уже будет иметь единственное решение.

Первое, очевидное и самое простое управленческое решение должно быть направлено на удержание структуры персонала на том уровне, на котором она находится. Для этого необходимо выполнить условие, аналогичное условию (9)

$$n = nQ. \tag{10}$$

Это условие выполнится, очевидно, не для любых матриц Q. Поэтому с математической точки зрения задача управления сводится к поиску такой матрицы Q, которая удовлетворяла бы условию (10). В свою очередь

$$Q = P + W^T R, \tag{11}$$

но и здесь не все входящие величины поддаются управлению. Так, увольнения и естественные выбытия не поддаются управлению и поэтому администрация Вуза не может повлиять на элементы вектора W. Перевод в более высокую категорию хотя и находится в ведении администрации, но нехватка подходящих кадров и политика, направленная на заполнение вакансий путем повышения, могут создать такую ситуацию, когда эти повышения будут ограничены очень тесными рамками. Отсюда вытекает, что и элементы матрицы P, вообще говоря, не подвластны администрации Вуза. Поэтому будем считать, что вектор W и матрица P вообще (пока) не могут быть изменены. Тогда все управление будет осуществляться только подбором соответствующих элементов вектора R, причем при выполнении условий

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix},\ r_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{4} r_i = 1.$$

Из (10) и (11) имеем $n = nP + nW^T R$, откуда

$$R = n(E - P) + (nW^T), \tag{12}$$

где Е – единичная матрица, а величина nW^T есть скалярная величина.

Очевидно, что все элементы полученного из (12) вектора R будут неотрицательны, если

$$n \geq nP \tag{13}$$

для всех элементов вектора n, что накладывает определенные условия на элементы матрицы P.

При фиксированном общем количестве преподавательских ставок N важную роль играют не количественные составы категорий, а пропорциональные отношения между категориями преподавателей, которые обозначены вектором X с элементами $X = nN^{-1}$.

Отсюда следует, что необходимо искать такое множество векторов $\{X\}$, которые удовлетворяют условию, следующему из (13)

$$X \geq XP. \tag{14}$$

Если считать вектор X точкой четырехмерного пространства, то множество всевозможных структур преподавательского контингента в этом пространстве есть множество точек выпуклой, в силу (14), фигуры, лежащей на гиперплоскости, описываемой уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ с вершинами, имеющими координаты

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad X^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad X^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так как nW^T - число, то из (12) имеем $n = (nW^T)R(E - P)^{-1}$, или, деля на N обе части этого равенства, получим

$$X = XW^T R(E - P)^{-1}. \tag{15}$$

Умножим обе части (15) на вектор-столбец, состоящий из одних единиц, который обозначим I^T, и в результате будем иметь

$$XI^T = 1 = XW^T R(E - P)^{-1} I^T = XW^T R d^T, \tag{16}$$

где элементы вектора d есть суммы элементов строк матрицы $(E - P)^{-1}$. Выражая из (16)

$$XW^T = (Rd^T)^{-1}$$

и подставляя эти значения в (15), получим вектор X в виде

$$X = (Rd^T)^{-1} R(E-P)^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{4} r_i e_i (E-P)^{-1}}{\sum_{i=1}^{4} r_i d_i}. \tag{17}$$

Здесь e_i - вектор, i-ая координата которого равна единице, а остальные координаты равны нулю.

Обозначим $a_i = \frac{r_i d_i}{\sum_{i=1}^{4} r_i d_i}$ и в принятых обозначениях равенство (17) можно переписать как

$$X = \sum_{i=1}^{4} a_i \{e_i (E-P)^{-1} d_i^{-1}\}. \tag{18}$$

По определению введенные коэффициенты $a_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1$.

В геометрии область, описываемая равенством $X = \sum_{i=1}^{4} a_i D^i$ при условии $a_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1$, обозначает множество координат внутренних точек выпуклой замкнутой области с вершинами D^i. Следовательно, любая точка X, задаваемая равенством (18), лежит в выпуклой области с вершинами, координаты которых определяются соотношением

$$D^i = e_i (E-P)^{-1} d_i^{-1} \quad \left(i = \overline{1,4}\right) \tag{19}$$

и каждая такая точка соответствует своему вектору R.

По принятым данным координаты искомых вершин множества (18) имеют значения:

$$D_1 = (0{,}19 \quad 0{,}07 \quad 0{,}14 \quad 0{,}6), \quad D_2 = (0 \quad 0{,}35 \quad 0{,}24 \quad 0{,}41),$$
$$D_3 = (0 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5), \quad D_4 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1).$$

Координаты полученных вершин есть предельные значения координат точек множества, что является следствием его выпуклости. Отсюда следует, что область, содержащая сохраняемые с течением времени структуры штатного расписания Вуза, содержит только структуры с явной перегрузкой в высших категориях доцентов и профессоров. Среди них наименее перегруженная структура есть

$$D_{\min} = (0{,}19 \quad 0{,}07 \quad 0{,}14 \quad 0{,}6),$$

для которой число ставок профессоров (0,6) в полтора раза превышает сумму всех остальных ставок (0,4).

Расчеты показывают, что это типично для структур, определяемых треугольной матрицей вероятностей P с большими элементами на главной диагонали, причем незначительные колебания значений отличных от нуля элементов p_{ij} матрицы P существенно на $D_{\min}$ не повлияют. Таким образом, управление набором на работу (вектором P) дает возможные структуры, худшие с точки зрения перегруженности высших категорий, чем $D_{\min}$.

Проведем анализ для случая, когда управлять можно только долей повышений. Математически это приведет к фиксированию векторов R и W. Изучим при этих условиях влияние изменения элементов матрицы P при дополнительном ограничении вида: $d_i = 1 - w_i$ для всех i $(i = \overline{1,4})$.

Ограничим возможность переходов из низших категорий только в следующие по порядку более высокие категории ($1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$). Остальные повышения запретим. Переходы с понижением категории тоже будем считать запрещенными. В этом случае матрица P становится двух диагональной, с отличными от нуля элементами только на главной диагонали и на следующей над ней. Для такой матрицы P существует единственное решение системы (10). Найдем это решение, приняв матрицу P в виде

$$P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

и оставив прежними векторы R и W. В результате приходим к новой системе

$$\begin{cases} -036x_1 + 0,07x_2 + 0,07x_3 + 0,14x_4 = 0 \\ 0,33x_1 - 0,385x_2 + 0,015x_3 + 0,03x_4 = 0 \\ 0,03x_1 + 0,315x_2 - 0,285x_3 + 0,03x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$

решение которой дает устойчивую предельную структуру штатного расписания

$X = (0,21 \quad 0,21 \quad 0,32 \quad 0,26)$, (22)

являющуюся хотя и не идеальной, но уже не перегруженной старшими категориями, как ранее полученная структура $D_{\min}$ с треугольной матрицей вероятностей P.

Таким образом, действительно, управление повышением, а не набором может давать не перегруженные высшими категориями предельные структуры. Структура (22) – одна из возможных, но далеко не оптимальная структура. Для получения оптимальной предельной структуры необходимо повторить алгоритм вычисления вершин допустимого множества (19) с новой матрицей вероятностей переходов P из (20).

Кроме этого можно решить обратную задачу, если задаться векторами R, W и X, и вычислить для них искомую матрицу P.

$$P = E - (IX)^{-1} IR(XW^T). \qquad (23)$$

Формула (23) позволяет отыскать элементы матрицы P при заданных векторах R, W и X. Ее элементы p_{12}, p_{23}, p_{34} определят, в рамках осуществляемой политики приема на работу преподавателей число возможных, «разрешенных» переходов в высшие категории в течение года по отношению к численности категории, из которой осуществляется переход.

Проведенные выше исследования позволяют понять те условия, при которых данная структура сохраняется с течением времени. Однако знание этих условий не отвечает на вопрос о том, как достичь требуемой структуры. Прежде чем ответить на этот вопрос, обратим внимание на то, что в области сохраняемости может быть достигнута любая структура, или она может быть приближена сколь угодно точно.

Рассмотрим случай управления набором, т.е. вектором R. Предельная желаемая структура X^* удовлетворяет равенству (15), откуда

$$R = X^*(E-P)(X^*W^T). \tag{24}$$

Указанный вектор R имеет неотрицательные элементы, если X^* лежит в области сохраняемости структур, т.е. если $X^* \geq X^*P$.

Очевидно, что управление может быть осуществлено последовательно, по шагам

$$R(0) \to R(1) \to \ldots \to R^*. \tag{25}$$

Следует ожидать, что такое управление дает лучшие результаты, чем фиксированная стратегия (24). Поэтому задача поиска лучшей стратегии состоит в определении последовательности векторов набора $\{R(T)\}$ из (25), таких, что изменение структуры от $X(0)$ до X^* происходит некоторым оптимальным образом. При этом термин «оптимальности можно понимать как:

- «так быстро, как это возможно»;
- «настолько дешево, насколько это возможно»;
- «настолько плавно, насколько это возможно» и т.д.

На практике администрация Вуза не располагает неограниченным запасом времени для достижения цели. Поэтому можно поставить задачу о наилучшем приближении к X^* за заданное время. Один из возможных путей реализации такой задачи заключается в переводе структуры штатного расписания профессорско-преподавательского состава из исходного состояния в возможно близкое к X^* за один шаг. Следующий шаг проводится с сохранением той же цели и т.д. …, до тех пор пока не будет исчерпано все отведенное на это время.

Список литературы

1. Савина В.А.,Ушаков Г.И.Планирование и финансирование расходов вузов и техникумов. -М.: Финансы, 1969. – 378с.
2. Чепорова Г.Е. Экономические проблемы функционирования государственного вуза в современных условиях // Ученые записки Симферопольского государственного университета, Симферополь, 1997. -N 3(42). с.59-64.