ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫЕ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Н.Д.Копачевский, доктор физико-математических наук, профессор, академик КАН, заслуженный деятель науки и техники Украины, Л.Д. Орлова(Болгова), аспирант, Ю.С. Пашкова, аспирант.

§ 0. Введение.

В данной работе отражены исследования, проведенные на кафедре математического анализа СГУ в последние несколько лет. Здесь методы функционального анализа применяются при качественном исследовании сложных гидромеханических систем, т.е. систем с бесконечным числом степеней свободы. При доказательстве теорем использованы теория полугрупп операторов, действующих в гильбертовом пространстве, метод сжимающих отображений, различные вопросы спектральной теории оператор-функций и др.

Результаты в статье в основном формулируются в абстрактном виде и могут быть легко применены для конкретных гидромеханических систем. В §1 рассмотрены задачи о малых движениях и нормальных колебаниях систем для однородной несжимаемой жидкости. Эти системы являются непосредственным обобщением на бесконечномерный случай задач об устойчивости механических систем с конечным числом степеней свободы (см., например, [1—3], а также [4]). Теоремы о неустойчивости, полученные здесь, близки к результатам работ [5—7]. Основной математический аппарат, использованный при получении результатов, можно найти в монографиях [8—11]. В других задачах он применялся, например, в работах [12—14].

Вопросы, рассмотренные в §2, близки к работе [15], однако здесь задача о движении вязкоупругой среды изучена в более общей ситуации.

При этом использованы результаты работ [16,17]. В §3 исследован новый класс задач о малых колебаниях релаксирующей идеальной жидкости. Методы исследования близки к работам [18—20, 10—11].

Отметим, что ввиду недостатка места теоремы и основные выводы в данной статье приведены без доказательства. Отметим еще, что в недавней публикации [21] рассмотрены вопросы, близкие к задачам §1.

Эта работа частично поддержана ГК Украины по науке и технологиям (тема 115/94), а также Международным научным фондом (грант NZP 000).

§1. ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ОДНОРОДНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ.

1.Математическая постановка задачи. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ рассмотрим дифференциально-операторное уравнение вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (F + K)\frac{du}{dt} + Bu = f(t) \qquad (1.1)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u^0, \; u'(0) = u^1 \qquad (1.2)$$

Здесь $u(t)$ – искомая функция переменной t со значениями в H; в приложениях ее физический смысл — поле малых отклонений гидромеханической системы от состояния относительного равновесия. Далее, правая часть $f(t)$ в (1.1) — заданная функция со значениями в H, характеризующая малое поле внешних сил, действующих на гидромеханическую систему. Операторные коэффициенты B, F и K имеют следующий физический смысл: B — оператор потенциальной энергии системы, F — оператор диссипации, K — кориолисов оператор, учитывающий действие на систему кориолисовых сил. (Роль оператора кинетической энергии играет в (1.1) единичный оператор I, стоящий перед $u''(t)$.)

Обозначим через $L(H)$ алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в H, а символами $A \geq 0$, $A > 0$, $A >> 0$ — свойства неотрицательности, положительности и равномерной положительности (положительной определенности) оператора A. Если $A - \gamma I \geq 0$, $\gamma \in R$, то говорят, что оператор A ограничен снизу.

Относительно операторных коэффициентов задачи (1.1) предположим, что имеют место свойства, обычно выполненные для гидромеханических систем с однородной несжимаемой жидкостью:

$$1^0.\ B = B^* \geq \gamma I;\ 2^0.\ K^* = -K \in L(H);\ 3^0.\ F \geq 0 \qquad (1.3)$$

Если $\gamma > 0$, т.е. оператор потенцальной энергии положительно определен, то говорят, что рассматриваемая система статически устойчива по линейному приближению. Свойство 2^0 кососимметричности оператора K обусловлено действием на систему кориолисовых сил, если система в состоянии относительного равновесия равномерно вращается с некоторой угловой скоростью. Далее, свойство 3^0 для оператора диссипации F естественно с физической точки зрения.

2. Теоремы о разрешимости задачи Коши. При исследовании задачи (1.1)—(1.2) могут быть применены общие методы теории линейных дифференциальных уравнений первого порядка с диссипативным операторным коэффициентом, действующим в гильбертовом пространстве [8].

Обозначим через $D(B)$ и $D(F)$ области определения (вообще говоря, неограниченных) самосопряженных операторов B и F соответственно и будем считать, что они плотны в H. Через $C^k([0,T];H)$ обозначим банахово пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций со значениями в H: если $u(t) \in C^k([0,T];H)$, то

$$\|u(t)\|_{C^k([0,T];H)} = \sum_{j=0}^{k} \max_{0\leq t\leq T} \|u^{(j)}(t)\|_H < \infty$$

Определение 1.1. Решением дифференциального уравнения (1.1) назовем функцию $u(t)$ со значениями в H, для которой при любом $t \in [0,T]$, $T > 0$, будет $u(t) \in D(B), Bu(t) \in C([0,T];H), u'(t) \in D(F) \cap D(B^{\frac{1}{2}}), u'(t) \in C([0,T];H)$, $Fu't \in C([0,T];H), u''(t) \in C([0,T];H)$ и выполнено уравнение (1.1).

Если свойство $B \geq 0$ не выполнено (и потому не существует $B^{\frac{1}{2}} \geq 0$, то при определении решения уравнения (1.1) считаем, что $B = B_+ - B_-$, $B_+ \geq 0$, $B_- \in L(H)$, и тогда требование $u'(t) \in D(F) \cap D(B^{\frac{1}{2}})$ заменяется требованием $u'(t) \in D(F) \cap D(B_+^{\frac{1}{2}})$.

Теорема 1.1. Пусть в задаче Коши (1.1),(1.2) выполнены условия

$$
\begin{gathered}
B \geq 0,\ f(t) \in C^1([0, T]; H), \\
u^0 \in D(B),\ u^1 \in D(F) \cap D\left(B^{\frac{1}{2}}\right)
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Тогда она имеет единственное решение $u(t)$, и для этого решения выполнен закон баланса полной энергии системы:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|_H^2 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|u^1\|_H^2 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u^0\right\|_H^2\right) - \\
- \int_0^t \left\|F^{\frac{1}{2}}u'(\tau)\right\|_H^2 d\tau + \int_0^t (f(\tau), u'(\tau))\,d\tau,\ \forall t \in [0, T]
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Построенная по решению $u(t)$ функция $y(t) := \left(u'(t); -i\,B^{\frac{1}{2}}u(t)\right)^t$ со значениями в $H^2 := H \oplus H$ является непрерывно дифференцируемой функцией и представима в виде

$$
\begin{gathered}
y(t) = U(t)y^0 + \int_0^t U(t-\tau)\,\tilde{f}(\tau)d\tau, \\
\tilde{f}(t) := (f(t); 0)^t,\ y^0 := \left(u^1; -i\,B^{\frac{1}{2}}u^0\right)^t,
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

где $U(t)$ — сжимающая полугруппа операторов с генератором $-A$,

$$
A = \begin{pmatrix} 2i\,G + F & i\,B^{\frac{1}{2}} \\ i\,B^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix},\ G = G^* = -i\,K \in L(H) \tag{1.7}
$$

Определение 1.2. Будем говорить, что $U(t)$ — обобщенное решение задачи Коши (1.1),(1.2), если функция $y(t) = \left(u'(t); -i\,B^{\frac{1}{2}}u(t)\right)^t$ представима в виде (1.6) с $y^0 \in H^2,\ \tilde{f}(t) \in C([0, T]; H^2)$.

Теорема 1.2. Если выполнены условия

$$
B \geq 0,\ f(t) \in C([0, T]; H),\ u^0 \in D\left(B^{\frac{1}{2}}\right),\ u^1 \in H, \tag{1.8}
$$

то задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное обобщенное решение; при этом функции $u'(t)$ и $B^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывны и имеет место неравенство

$$
\|y(t)\|_{H^2} = \left(\|u'(t)\|_H^2 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\|u^1\|_H^2 + \left\|B^{\frac{1}{2}}u^0\right\|_H^2\right) + T\|f(t)\|_{C([0,T];H)} \tag{1.9}
$$

Теорема 1.3. Пусть в задаче (1.1), (1.2) выполнены условия

$$
\begin{gathered}
B = B_+ - B_-;\ B_+ \geq 0,\ 0 < B_- \in L(H), \\
f(t) \in C^1([0, T]; H),\ u^0 \in D(B),\ u^1 \in D(F) \cap D\left(B_+^{\frac{1}{2}}\right)
\end{gathered}
\tag{1.10}
$$

Тогда она имеет единственное решение $u(t)$ на любом промежутке $[0, T],\ T > 0$; для этого решения выполнен закон (1.5) баланса полной энергии системы с заменой слагаемых

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H^0 \to \left\|B_+^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H^2 - \left\|B_-^{\frac{1}{2}}u(t)\right\|_H^2,$$

$$\left\|B^{\frac{1}{2}}u^0\right\|_H^2 \to \left\|B_+^{\frac{1}{2}}u^0\right\|_H^2 - \left\|B_-^{\frac{1}{2}}u^0\right\|_H^2.$$

Теоремы 1.1 — 1.3 есть утверждения о корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2) на промежутке $[0,\ T]$ как в устойчивом $(B \geq 0)$, так и в неустойчивом $(B_- > 0)$ случае.

3. Спектральная задача. Теоремы о неустойчивости. Рассмотрим решения однородного уравнения (1.1), зависящие от t по закону

$$u(t) = ve^{-\lambda t},\quad \lambda \in C,\quad v \in H \qquad (1.11)$$

Тогда взамен (1.1) приходим к спектральной задаче вида

$$L(\lambda)v := \left(\lambda^2 I - \lambda(F + K) + B\right)v = 0 \qquad (1.12)$$

для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ с неограниченными операторными коэффициентами F и B. Если задача (1.12) имеет нетривиальное решение $(v;\ \lambda)$ с $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, то ему отвечает экспоненциально возрастающее с ростом t решение однородной эволюционной задачи (1.1).

Областью определения $D(L(\lambda))$ операторного пучка $L(\lambda)$ будем считать множество $D(F) \cap D(B)$, плотное в H.

При исследовании задачи (1.12) будем пользоваться известными определениями (см., например, [9,10,11]) изолированного собственного значения, собственного и присоединенного элементов и др. для операторных пучков как с ограниченными, так и неограниченными операторными коэффициентами. Множество всех компактных операторов, действующих в H, обозначим через $G_\infty(H)$ или просто G_∞.

Теорема 1.4 (о неустойчивости). Пусть выполнены условия (1.3), $K = 0$, а также условия

$$B = B_+ - B_-,\quad B_+ \geq 0,\quad 0 < \dim B_- =: \varkappa < \infty,\qquad F \gg 0,$$
$$0 < F^{-1} \in G_\infty(H),\qquad B_+^{\frac{1}{2}}F^{-\frac{1}{2}} \in G_\infty(H) \qquad (1.13)$$

Тогда задача (1.12) имеет в левой комплексной полуплоскости ровно $\varkappa$ (с учетом кратностей) собственных значений, которые расположены на вещественной оси. В правой комплексной полуплоскости спектр задачи (1.12) дискретен и имеет две предельные точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, вещественны.

Теорема 1.5 (о неустойчивости). Пусть в задаче (1.12) выполнены условия (1.3) и (1.13), а также условие

$$\mathrm{Ker}\,B = \{0\} \qquad (1.14)$$

Тогда в левой комплексной полуплоскости (при любом $K \in L(H)$) задача (1.12) имеет ровно $\varkappa$ (с учетом кратностей) собственных значений.

Таким образом, из теоремы 1.4 следует, что если гидромеханическая система статически неустойчива по линейному приближению и минимальное собственное значение оператора потенциальной энергии B отрицательно, то эта система является и динамически неустойчивой. Что касается теоремы 1.5, то ее физический смысл состоит в том, что при наличии в системе диссипации (со свойствами (1.13) у оператора $\mathbf{F}$) "включение" в действие кориолисовых сил не изменяет факта неустойчивости системы: как и в задачах с конечным числом степеней свободы (см.[1—3]), здесь не происходит гироскопическая стабилизация системы.

В заключение этого пункта отметим, что утверждения теорем 1.4 и 1.5 по своим формулировкам наиболее близки к теоремам, полученным в [7] для пучков вида (1.12) в предположениях, отличных от (1.13): в задаче В.Н.Пивоварчика "главным" операторным коэффициентом является не оператор $\mathbf{F}$, а оператор $\mathbf{B}_+$.

4.Примеры. Рассмотрим некоторые гидромеханические системы, для которых справедливы утверждения теорем 1.1—1.5 (см.[11]).

1.0 Консервативные системы: $\mathbf{F} = 0$.

а) Тяжелая идеальная жидкость в частично заполненном неподвижном сосуде. Здесь $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{B} \gg 0$, причем оператор $\mathbf{B}$ имеет дискретный спектр.

б) Капиллярная идеальная жидкость в частично заполненном сосуде. Здесь снова $\mathbf{K} = 0$, а оператор $\mathbf{B} = \mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-$, $\mathbf{B}_+ \geq 0, 0 \leq \dim \mathbf{B}_- = \mathbf{x} < \infty$.

в) Маятник с полостью, частично заполненной идеальной тяжелой жидкостью (задача Н.Н.Моисеева — С.Г.Крейна). Здесь оператор $\mathbf{B}$ имеет дискретный спектр с $0 \leq \dim \mathbf{B}_- \leq 2$.

г) Маятник с полостью, частично заполненной капиллярной идеальной жидкостью (задача Вадиаа Али — Н.Д.Копачевского, см. [12]). В плоской задаче здесь $\mathbf{x} > 0$ может быть произвольным положительным числом.

д) Тяжелая либо капиллярная идеальная жидкость в равномерно вращающемся сосуде (задача Н.Д.Копачевского): $\mathbf{K} \neq 0$, $\mathbf{B} \geq 0$.

е) Стратифицированная идеальная жидкость в частично заполненном сосуде (задача Н.Д.Копачевского и А.Н.Темнова [13]): $\mathbf{K} = 0$, $\mathbf{B} \geq 0$.

ж) Неоднородная идеальная жидкость в равномерно вращающемся сосуде (задача Н.Д.Копачевского и С.И.Смирновой [14]): $\mathbf{K} \neq 0$, $\mathbf{B} \geq 0$.

з) Другие задачи: контейнер с жидкостью и с упругим днищем или упругими днищами-перегородками (Нго Зуй Кан, А.В.Андронов, Н.Д.Копачевский); контейнер с жидкостью, ограниченной упругой мембраной или системой мембран (Н.Д.Копачевский, Ю.С.Пашкова); маятник с полостью, заполненной системой из несмешивающихся тяжелых жидкостей (Нго Зуй Кан, Вадиаа Али, Н.Д.Копачевский).

2.0 Диссипативные системы: $\mathbf{F} > 0$.

а) Тяжелая вязкая жидкость в частично заполненном сосуде (задача С.Г.Крейна): $\mathbf{F} \gg 0$, $\mathbf{B} \geq 0$, $\mathbf{K} = 0$.

б) Вращающаяся тяжелая вязкая жидкость в частично заполненном сосуде (задача Н.Д.Копачевского): $\mathbf{F} \gg 0$, $\mathbf{B} \geq 0$, $\mathbf{K} \neq 0$.

в) Вязкая стратифицированная жидкость в полностью заполненном неподвижном сосуде (задача Н.Д.Копачевского и А.Н.Темнова): $\mathbf{F} \gg 0$, $\mathbf{B} \geq 0$.

г) Маятник с полостью, частично заполненной вязкой тяжелой либо капиллярной жидкостью (Нго Зуй Кан, Е.Д.Володкович, Н.Д.Копачевский, Вадиаа Али): $\mathbf{F} \gg 0$, $\mathbf{B} \geq \gamma \mathbf{I}, 0 \leq \dim \mathbf{B}_- < \infty$, $\mathbf{K} = 0$ или $\mathbf{K} \neq 0$.

3.0 Частично диссипативные гидросистемы: $\mathbf{F} \geq 0$, причем $\mathbf{F} > 0$ на некотором подпространстве бесконечной размерности.

а) Колебания двуслойной гидросистемы "вязкая жидкость-идеальная жидкость" в неподвижном сосуде (Н.Д.Копачевский, И.М.Клинчин): $\mathbf{K} = 0, \mathbf{B} \geq 0$.

б) Колебания вращающейся частично диссипативной гидросистемы (Н.Д.Копачевский): $\mathbf{K} \neq 0, \mathbf{B} \geq \gamma \mathbf{I}, \gamma \in \mathbf{R}$.

§2. Вязкоупругие гидросистемы.

1. Постановка задачи. В сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения Вольтерра вида

$$\frac{du}{dt} + A_1 u + \sum_{k=2}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s) ds = f(t), \; u(0) = u^0 \quad (2.1)$$

Здесь $u = u(t)$ —искомая функция со значениями в $\mathbf{H}$, γ_k —положительные постоянные:

$$0 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_m < \infty \qquad (2.2)$$

$f(t)$ —заданная функция со значениямн в $\mathbf{H}$, $u^0 \in \mathbf{H}$.

Через $A_k\left(k = \overline{1, m}\right)$ в (2.1) обозначены (вообще говоря) неограниченные линейные операторы, заданные на плотиых в $\mathbf{H}$ множествах $D(A_k)$, их свойства будут уточнены ниже.

Отметим, что к задаче вида (2.1) приводится начально-краевая задача о малых движениях вязкоупругой жидкости в полностью заполненном сосуде [15]. При этом $\mathbf{H} = \vec{J}_0(\Omega)$ (см.[11]), $m = 2$, а операторы A_1 и A_2 совпадают между собой и равны известному оператору Стокса $A_0 = -P_0\Delta$, возникающему в проблеме малых движеиий однородной жидкости в сосуде [16].

2. Теорема о корректиой разрешимости. Самосопряженный случай. Будем считать, что для операторов A_k из (2.1) выполнены условия

$$D(A_k) = D(A_1)\left(k = \overline{2, m}\right) \quad 0 < A_k^{-1} \in G_\infty \left(k = \overline{1, m}\right) \quad (2.3)$$

т.е. операторы A_k являются сходными.

Введем в (2.1) новые искомые функции

$$u_1(t) = u(t), \quad u_k(t) = \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{\frac{1}{2}} u(s) ds \quad \left(k = \overline{2, m}\right) (2.4)$$

Если $u(t)$ — решение задачи (2.1), т.е. является непрерывно дифференцируемой функцией t и при каждом t принадлежит $D(A_1) = D(A_k)$, то функции (2.4) непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{du_k}{dt} = A_k^{\frac{1}{2}} u_1(t) - \gamma_k u_k(t), \quad u_k(0) = 0, \quad k = \overline{2, m} \quad (2.5)$$

Вместе с (2.1) соотношения (2.5) приводят к задаче Коши в пространстве $\tilde{H} = \bigoplus_{k=1}^{m} H_k,\ H_k = H$:

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + A\tilde{u} = \tilde{f}(t,) \qquad \tilde{u}(0) = \tilde{u}^0,$$
$$\tilde{u}(t) = (u_1(t); \ldots; u_m(t))^t, \quad \tilde{f}(t) = (f(t); 0; \ldots; 0)^t, \quad \tilde{u}^0 := (u^0; 0; \ldots; 0)^t, \tag{2.6}$$

где матричный оператор A размером $m \times m$ при любом $m \geq 2$ в блочной форме представнм в виде

$$A = (A_{ij})_{i,j=1}^{2}, \qquad A_{11} := A_1, \quad A_{12} := \left(A_2^{\frac{1}{2}}; \ldots; A_m^{\frac{1}{2}}\right),$$
$$A_{21} := \left(-A_2^{\frac{1}{2}}; \ldots; -A_m^{\frac{1}{2}}\right)^t, \quad A_{22} := \mathrm{diag}(\gamma_k I)_{k=2}^{m}. \tag{2.7}$$

Из свойств (2.7) следует, что оператор A , заданный на плотном в $\tilde{H}$ множестве

$$D(A) = D(A_1) \oplus \left(\oplus_{k=2}^{m} D\left(A_k^{\frac{1}{2}}\right)\right), \quad D\left(A_k^{\frac{1}{2}}\right) = D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right),$$

является максимальным диссипатнвным оператором и

$$\mathrm{Re}(A\tilde{u}, \tilde{u})_{\tilde{H}} \geq c\|\tilde{u}\|_{\tilde{H}}^2, \quad c = \min\left(\lambda_1(A_1); \min_k \gamma_k\right) > 0 \tag{2.8}$$

Следствием этнх свойств является такое утверждение.

Теорема 2.1. Пусть в задаче (2.1) выполнены условия (2.2), (2.3),

$$f(t) \in C^1([0, T]; H),\ u^0 \in D(A_1) \tag{2.9}$$

Тогда эта задача имеет единственное решенне, для которого $u(t) \in D(A_1)$ при любом $t \in [0, T]$, $u'(t) \in C([0, T]; H)$ и непрерывны все слагаемые, входящие в (2.1).

Доказательство теоремы (2.1) основано на применении теории полугрупп [8] к уравненню (2.6) и свойстве (2.8).

3.Свойства решений спектральной задачи. Рассмотрнм решения однородной задачи (2.6), завнсящие от t по закону $\tilde{u}(t) = \tilde{u}\exp(-\lambda t)$, $\lambda \in C$, $\tilde{u} \in \tilde{H}$. Для амплитудных элементов $\tilde{u}$ приходим к задаче

$$A\tilde{u} = \lambda\tilde{u}, \quad \tilde{u} \in D(A) \subset \tilde{H} \tag{2.10}$$

на собственные значения для оператора A .

Исследование этой задачи с использованием теории лннейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой приводит к следующим выводам.

Теорема 2.2. Пусть для операторов $A_k(k = \overline{1, m})$ кроме условий (2.3) выполнены дополнительные условия

$$0 < c_k \le \left\|A_k^{\frac{1}{2}}\right\|_H^2 \Big/ \left\|A_1^{\frac{1}{2}}u\right\|_H^2 \le d_k < \infty, \qquad (2.11)$$
$$k = \overline{2, m}, u \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right)$$

Тогда решения спектральной задачи (2.10) обладают следующими свойствами.

1.0 Спектр задачи (2.10) симметричен относительно вещественной оси и расположен в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \ge c > 0$, где c определена в (2.8).

2.0 Задача (2.10) имеет не более конечного числа невещественных собственных значений.

3.0 Предельный спектр задачи (2.10) совпадает с предельным спектром оператора

$B = A_{22} + A_{12}^{*}A_{11}^{-1}A_{12} >> 0, \quad B \in L\left(H^{m-1}\right), \qquad (2.12)$ где A_{1k} определены в (2.7).

4.0 В области $\lambda \notin \sigma(B), \lambda \in R$, спектр задачи (2.10) дискретен и может иметь в качестве предельных точек для (конечнократных) собственных значений точку $\lambda = +\infty$, а также точки множества $\sigma(B)$. При этом к точкам $\sigma(B)$ ветви собственных значений дискретного спектра могут подходить лишь по вещественной оси.

5.0 Если в задаче (2.10) выполнены условия

$$A_k = \alpha_k A_1, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{2, m} \qquad (2.13)$$

что соответствует при $m = 2$ случаю вязкоупругой жидкости, то эта задача имеет дискретный спектр, состоящий из $m - 1$ серий собственных значений $\lambda_n^{(k)} \to \beta_k\left(n \to \infty, k = \overline{2, m}\right)$ и серии $\lambda_n^{(\infty)} \to +\infty(n \to \infty)$. Здесь β_k — бесконечнократные собственные значения оператора B со свойствами $0 < \gamma_2 < \beta_2 <\cdots < \gamma_m < \beta_m < \infty$, являющиеся нулями функции $1 + \sum_{k=2}^{m} \alpha_k / (\gamma_k - \lambda) =: f_0(\lambda)$.

Более детальную структуру спектра задачи (2.10) при дополнительных предположениях устанавливает

Теорема 2.3. В условиях теоремы 2.2 в задаче (2.10) при $m = 2$ можно так подобрать коммутирующие операторы A_1 и A_2, что весь спектр оператора B будет являться предельным спектром и совпадет с отрезком $\left[\gamma_2 + 1, \gamma_2 + 2\right]$; при $m = 3, \gamma_2 = \gamma_3$ можно так подобрать коммутирующие между собой операторы A_1, A_2 и A_3, что спектр оператора B будет являться его предельным спектром и совпадет с множеством $\gamma_2 \cup \left[\gamma_2 + 2, \gamma_2 + 4\right]$.

Доказательство теоремы 2.3 получено совместно с Т.Я.Азизовым. Из нее следует, в частности, что общая структура спектра задачи (2.10) может быть достаточно сложна. Уточнение этих свойств дает

Теорема 2.4. Имеют место следующие утверждения.

1. Пусть операторы A_k имеют структуру

$$A_k = \alpha_k A_1 + C_k, \; C_k := A_1^{\frac{1}{2}} F_k A_1^{\frac{1}{2}}, \; F_k \in G_\infty, \; k = \overline{2, m} \qquad (2.14)$$

и выполнены условия:

а) операторы $\widetilde{A}_{1k} := \sum_{k=2}^{m} F_k \Big/ (\beta_k - \gamma_k) + \beta_k A_1^{-1} \quad \left(k = \overline{2, m}\right)$ бесконечномерны;

б) $\widetilde{A}_k := I - \left[f_0'(\beta_k)\right]^{-1} T_1 \gg 0, \quad T_1 := A_1^{-1} - \sum_{k=2}^{m} F_k \Big/ (\beta_k - \gamma_k)^2$.

Тогда спектр задачи (2.10) дискретен и может быть разбит на m серий положительных собственных значений с предельными точками β_k, $k = \overline{2, m}$ и $+\infty$, где числа β_k — те же, что и в свойстве 5.0 теоремы 2.2.

2.0 Пусть выполнены условия 1.0, $\operatorname{Ker} \widetilde{A}_{1k} = \{0\} \quad \left(k = \overline{2, m}\right)$, собственные значения $\lambda_j(A_1)$ оператора A_1 имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_j(A_1) = a_1^{-1/\delta_1} j^{1/\delta_1}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty, a_1 > 0, \delta_1 > 0)$$

а собственные значения операторов $\widetilde{A}_{1k}$ — асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{\pm}(\widetilde{A}_{1k}) = \pm\left(a_k^{\pm}\right)_1^{1/\delta_k^{\pm}} j^{-1/\delta_k^{\pm}}[1 + o(1)] \quad \left(j \to \infty, a_k^{\pm} > 0, \delta_k^{\pm} > 0, k = \overline{2, m}\right).$$

Тогда ветвь $\lambda_j^{(\infty)}$ имеет асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{(\infty)} = \lambda_j(A_1)[1 + o(1)] \quad (j \to \infty);$$

а каждая из ветвей $\left\{\lambda_n^k\right\}$ с предельными точками $\beta_k\left(k = \overline{2, m}\right)$ может быть разбита на две подветви $\left\{\lambda_n^{k,\pm}\right\}_{j=1}^{\infty}$, расположенные справа и слева от β_k и имеющие асимптотическое поведение

$$\lambda_j^{k,\pm} = \beta_k + \lambda_j^{\pm}(\widetilde{A}_{1k})\left(f_0'(\beta_k)\right)^{-1}[1 + o(1)] \quad \left(j \to \infty, k = \overline{2, m}\right)$$

Отметим еще одно свойство решений задачи (2.10), полученное при участии Т.Я.Азизова.

Теорема 2.5 В задаче (2.10) в условиях теоремы 2.2 можно выделить ветвь положительных собственных значений $\left\{\lambda_n^{\infty}\right\}_{n=1}^{\infty}$ с предельной точкой $+\infty$, этой ветви отвечают проекции на H собственных элементов, образующие базис Рисса с конечным дефектом в пространстве H. Если выполнено условие $A_1^{-1} \in G_{p_1}$, то указанный базис является (см.[17]) p - базисом (с конечным дефектом) в H при $p \geq 2p_1$.

4. Теорема о корректной разрешимости. Несамосопряженный случай. Вернемся к задаче (2.1) и будем считать, что выполнены условия (2.2), а взамен (2.3) — условия

$$\begin{gathered} D(A_k) \supset D(A_1), \quad k = \overline{2, m}, \quad 0 < A_1^{-1} \in G_\infty, \\ \|A_k u\| \leq c_k \|A_1 u\|, \quad \forall u \in D(A_1). \end{gathered} \tag{2.14}$$

Теорема 2.6. Пусть выполнены условия (2.14) и (2.9). Тогда справедливы утверждения теоремы 2.1.

Доказательство этой теоремы основано на переходе от (2.1) к интегральному уравнению Вольтерра и использованни принципа сжимающих отображений.

Очевндно, теорема 2.6 является обобщеннем теоремы 2.1 на случай, когда операторы $A_k\left(k = \overline{2, m}\right)$ не обязательно самосопряженные, в частности, для них не требуется выполнение условий (2.11).

§3. Релаксирующие гидросистемы.

1. Постановка задачи. Движение жидкости, обладающей свойством релаксации, определяется полямн скорости, давления и плотности не только в данный момент времени, но и поведеннем этих полей во все время движения до этого момента: релаксирующие жидкости обладают "памятью", учитывающей предысторню движения.

Так, поле плотности идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей некоторую область Ω , в простейшем случае является решением интегродифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} - \Delta\left(a^2(x)u\right) + b\Delta\int_0^t e^{-\delta(t-s)}u(s, x)ds = f(t, x), \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

где $a^2(x)$ — квадрат скорости звука, $b \in R$, $\delta > 0$, а Δ — оператор Лапласа.

Обобщая эту ситуацию, рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H задачу Коши для интегродифференцнального уравнения

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dt^2} + A^1u + \sum_{k=2}^{m}\int_0^t \exp(-\gamma_k(t - s))A_k u(s)ds = f(t), \\ u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \quad \gamma_k > 0\left(k = \overline{2, m}\right). \end{gathered} \tag{3.2}$$

Будем считать, что операторы $A_k\left(k = \overline{2, m}\right)$ обладают следующими свойствами

$$\begin{gathered} A_1 \gg 0, \quad 0 < A_1^{-1} \in G_\infty, \quad D(A_k) \supset D(A_1) \quad \left(k = \overline{2, m}\right), \\ \|A_k u\| \le c_k\|A_1 u\| \quad \left(\forall u \in D(A_1), c_k > 0, \left(k = \overline{2, m}\right)\right) \end{gathered} \tag{3.3}$$

Отметим, что если все $A_k = 0 \quad \left(k = \overline{2, m}\right)$, то (3.2) переходит в хорошо исследованную задачу Коши для гиперболического уравнения.

2. Теорема о корректиой разрешимости. Доказательство формулируемой ниже теоремы об однозначной разрешимости задачи Коши (3.2) проводится по тому же плану, который был использован в работе [18] для случая $m = 2$, $A_2 = a_2A_1$, $a_2 > 0$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия (3.3) и условия

$$u^0 \in D(A_1), \quad u^1 \in D\left(A_1^{\frac{1}{2}}\right), \quad f(t) \in C([0, T]; H). \tag{3.4}$$

Тогда задача (3.2) имеет единственное решение на отрезке $[0, T]$.

Если условия (3.4) не выполнены, то при более слабых ограничениях можно установить существование обобщенного решения задачи (3.2).

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия (3.3) и условия

$$u^0 \in H, \quad u^1 \in \left(H_{A_1}\right)^*, \quad f(t) \in C\left([0, T]; \left(H_{A_1}\right)^*\right) \tag{3.5}$$

Тогда задача (3.2) имеет единственное обобщенное решение, т.е. непрерывную функцию $u(t)$, являющуюся решением интегрального уравнения Вольтерра

$$u(t) = \cos\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right)u^0 + \sin\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(A_1^{-\frac{1}{2}}u^1\right) + \int_0^t \sin\left[(t - s)A_1^{\frac{1}{2}}\right]A_1^{-\frac{1}{2}}f(s)ds -$$

$$-\sum_{k=2}^{m} \int_0^t U_k(t - s)\left(A_1 + \gamma_k^2 I\right)^{-1} A_k u(s)ds, \tag{3.6}$$

$$U_k(t) = \exp(-\gamma_k t)I - \cos\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right) + \gamma_k \sin\left(t A_1^{\frac{1}{2}}\right)A_1^{-\frac{1}{2}},$$

равносильного задаче (3.2).

3. Нормальные колебания релаксирующей жидкости в ограниченной области. Рассмотрим уравнение (3.1) при граничном условии Дирихле

$$u = 0 \quad (x \in \partial\Omega) \tag{3.7}$$

на границе $\partial\Omega$ области Ω. Введя оператор

$Au = -\Delta u$, $u \in D(A) = \overset{0}{W}{}^2_2(\Omega) \cap \overset{0}{H}{}^2(\Omega)$, приходим к выводу, что $A \gg 0, 0 < A^{-1} \in G_\infty$, если $H = L_2(\Omega)$.

Осуществляя в (3.1) замену

$$v(t, x) = \int_0^t be^{-\delta(t-s)}u(s, x)ds, \tag{3.8}$$

полагая $f(t) \equiv 0$ и рассматривая решения вида $v(t, x) = e^{-\lambda t}v(x)$, приходим к спектральной задаче вида

$$L(\lambda)v := \left(\lambda^2(1 - \tau\lambda)A_0 - \tau\lambda I + B\right)v = 0,$$

$$A_0 := \left(a_\infty^{-1}(x)\right)A^{-1}\left(a_\infty^{-1}(x)\right), \quad Bv := \alpha(\tau, x)v, \tag{3.9}$$

$$\alpha(\tau, x) = 1 - \tau\gamma(x), \quad \gamma(x) = b/a_\infty^2(x) > 0, \quad \tau = 1/\delta > 0$$

Лемма 3.1. Если функция $a_\infty^{-1}(x)$ положительна и непрерывна в $\overline{\Omega}$, то оператор A_0 положителен и компактен в $L_2(\Omega)$, его собственные значения имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_0) = \left(\frac{1}{6\pi}\int_\Omega a_\infty^{-3}(x)dx\right)^{2/3} k^{-2/3}\left[1 + o(1)\right] \quad (k \to \infty) \tag{3.10}$$

Лемма 3.2. Пусть выполнены естественные с физической точки зрения условия $0 < \alpha(\tau, x) < 1$, а $\gamma_- = \mathbf{inf}\{\gamma(x), x \in \overline{\Omega}\}, \gamma_+ = \mathbf{sup}\{\gamma(x), x \in \overline{\Omega}\}$. Если $\mathbf{a}_\infty^{-2}(x)$ непрерывна и положительна в $\overline{\Omega}$, то оператор $\mathbf{B}$ самосопряжен н положителен в $\mathbf{H}$, причем $\sigma(\mathbf{B}) = [\alpha_-(\tau), \alpha_+(\tau)]$, $\alpha_\pm(\tau) = 1 - \tau\gamma_\mp$. Если $\mathbf{a}_\infty(x) = \mathbf{a} = \mathbf{const}$, то отрезок спектра смыкается в точку.

Теорема 3.3. Для решений задачи (3.9) имеют место следующне свойства.

1.0 Отрезок $\Delta_\tau := [\alpha_-(\tau)/\tau, \alpha_+(\tau)/\tau]$ является предельным спектром задачи (3.9); вне этого отрезка задача нмеет днскретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений, расположенных снмметрично относительно вещественной оси, с возможными предельными точками на указанном отрезке и точки $\lambda = +\infty$.

2.0 Вещественный спектр задачи расположен на промежутке $[\alpha_-(\tau)/\tau, 1/\tau]$ и потому на промежутке $(\alpha_+(\tau)/\tau, 1/\tau)$ может быть не более счетного множества собственных значений $\{\lambda_K^0\}$ с возможнымн предельными точками на отрезке $\Delta\tau$. Если время релаксацин настолько мало, что $0 < \tau \le 1/(3\gamma_+)$, то невещественные собственные значения задачи (3.9) не могут иметь в качестве предельных точки отрезка $\Delta\tau$, т.е. предельного спектра задачи.

Теорема 3.4. Имеют место следующие свойства.

1.0 Задача (3.9) имеет две ветви невещественных собственных значенний $\{\lambda_K^\pm\}$, расположенных в полосе $\tau/(2\lambda_1(A_0)) < \mathbf{Re}\,\lambda < 2/(3\tau)$ и имеющнх асимптотическое поведенне

$$\lambda_k^\pm = \pm\mathbf{i}\left(\lambda_k(A_0)\right)^{-1/2}[1 + \mathbf{o}(1)] \quad (\mathbf{k} \to \infty) \qquad (3.11)$$

2.0 Система элементов вида $\left\{\left(\mathbf{v}_{kq}^\pm; \mathbf{i}\,\lambda_k^\pm A_0^{\frac{1}{2}}\mathbf{v}_{kq}^\pm\right)^t\right\}$, отвечающая собственным значениям $\lambda_k^\pm$ и собственным и прнсоединенным элементам $\mathbf{v}_{kq}^\pm$ задачи (3.9), имеет не более конечного дефекта в гильбертовом пространстве $(\mathbf{L}_2(\Omega))^2$.

3.0 Если параметры задачи (3.9) удовлетворяют условиям

$$\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0) \prec \tau,\ 1' - \tau\eta_- \prec 0,\ \tau^2 + \lambda_1(A_0) - 6\tau\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0) + 4\tau^2\lambda_1^{\frac{1}{2}}(A_0)\eta_- \succ 0,$$

то упомянутая выше система элементов полна в $(\mathbf{L}_2(\Omega))^2$.

4.0 Для вещественных собственных значений λ_k^0 задачи (3.9), расположенных на промежутке $(\alpha_+(\tau) / \tau, 1 / \tau)$, имеют место двусторонние оценки

$$\delta_k^- / \tau \le \lambda_k^0 \le \delta_k^+ / \tau, \quad \mathbf{k} \in \mathbf{N},$$

где $\delta_k^\pm$ — корнн уравнений

$$\lambda_k(A_0)\, x^2(1 - x) = (x - \alpha_\pm(\tau))\, \mathbf{r}^2,$$

расположенные на промежутке $(\alpha_+(\tau), 1)$.

Как следует из утверждений теорем 3.3 и 3.4, в релаксирующей жидкости с переменной скоростью звука существуют два типа волновых движенний: акустическо-релаксационные волны, близкие к обычным акустическим волнам, и чисто релаксационные волны.

Отметим в заключение, что теоремы 2.6 и 3.1 допускают обобщение на случай интегро-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с интегральными операторами Вольтерра, ядра которых зависят от разности аргументов. В задаче (3.2) при этом используется косинус-оператор функция, являющаяся операторным обобщением тригонометрического косинуса [19,20].

Отметим также, что результаты §1 получены Н.Д.Копачевским и Ю.С.Пашковой, а §2 и §3 — Н.Д.Копачевским и Л.Д.Орловой (Болговой).

Авторы благодарят Т.Я.Азизова за обсуждение результатов и сотрудничество по некоторым вопросам, рассмотренным в этой работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E.E.Zayac. The Kelvin Chetaev theorem and extensions J.Austranaut.Sci X I 1964 2 46—49

2. W.Tomson (Lord Kelvin) and P.G.Tait. Treatise on natural philosophy. Part 1, Kembridge University Press, 1921.

3. Н.Г.Четаев. Устойчивость движения.- М: Наука, 1960.

4. А.И.Милославский. Обоснование спектрального подхода в неконсервативных задачах теории упругой устойчивости //Функциональный анализ и его приложения. — Т.17, 1983.- N 3.-С.83—84.

5. В.Н.Пивоварчик. О спектре квадратичного операторного пучка в правой полуплоскости // Матем.заметки.— Т.45, 1989.

6. В.Н.Пивоварчик. О спектре некоторых квадратичных пучков неограниченных операторов // Функциональн. анализ и его приложения.—Т.23, 1989.- N 1

7. В.Н.Пивоварчик. Об общей алгебраической кратности спектра в правой полуплоскости для некоторого класса квадратичных операторных пучков // Алгебра и анализ.— Т.3, 1991.- Вып.2.

8. С.Г.Крейн. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.- М: Наука, 1967.- 464 с.

9. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- М: Наука, 1965.—448 с.

10. А.С.Маркус. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.- Кишинев: Штиинца, 1986.- 260 с.

11. Н.Д.Копачевский, С.Г.Крейн, Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике // М: Наука, 1989.- 416 с.

12. Вадиаа Али. Применение методов спектрального анализа оператор-функций в задаче о колебаниях маятника с полостью, заполненной жидкостью .—Канд.дисс., Симферополь, СГУ, 1994.-205с.

13. Н.Д.Копачевский, А.Н.Темнов. Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы // Журн. вычисл. матем. и матем. физ..— Т.26, 1986.- N 5.- 734—755 с.

14. С.И.Смирнова. Малые движения и собственные колебания идеальной неоднородной несжимаемой жидкости.—Канд. дисс., Симферополь, СГУ, 1994.- 140 с.

15. А.И.Милославский. Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды // Докл. АН СССР.— Т.309, 1989.- N 3.- 532-536 с.

16. О.А.Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.- М:Наука, 1970.- 288 с.

17. В.А.Пригорский. О некоторых классах базисов гильбертова пространства УМН. - Т.20, 1965.- N 5.- Вып.125.- 231—236 с.

18. R.K.Miller, R.L.Wheeler. Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces//Funkcialaj Ekvacioj.- V.21, 1978.- 279—305 pp.

19. M.Sova. Cosine operator functions // Rosprawy Matematiyczne.-V.49, 1966.- 1-47

20. U.O.Fattorini. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces North-Holland.- 1985.

21. М.Ю.Царьков. Об операторном подходе в задачах гидродинамики // Депонировано в ГНТБ Украины 06.04.94, N 645—Ук 94.- 12с.