# Курс «Методы исследования операций»

*М.С. Рыбников*
доцент, к.ф.-м.н., кафедра информационных систем в экономике

## *Тема 1. Понятия, принципы и средства исследования операций.*

*Основные определения. Проблема информированности исследователя. Математический аппарат исследований. Общие сведения. Прикладные аспекты исследования операций.*

Первоначально исследование операций было определено как *научный метод, дающий в распоряжение руководителя количественные основания для принятия решений, связанных с деятельностью подчиненных организаций.* Подчеркивалось, что речь идет о прикладной науке, применяющей достижения фундаментальных наук для анализа специфических проблем совершенствования руководства.

С течением времени круг интересов исследователей операций значительно расширился и охватывает сегодня области экономики, военного дела, энергетики, освоения природных ресурсов и автоматизации производства и управления различными видами деятельности.

*Термин "операция" означает совокупность взаимосогласованных действий, направленных на достижение вполне определенных целей.*

До тех пор, пока цель не определена, нет смысла говорить об операции. Если цель определена и существуют разные пути ее достижения, то желательно найти лучший из них, добиваясь надлежащей согласованности предпринимаемых действий. Понятие «лучший» относительно и требует уточнения во всех случаях. Оно начинает что-либо значить тогда, когда назван *показатель* (*критерий*) качества выбираемых решений

Говоря об операции, мы всегда ассоциируем с ней некоторого субъекта (отдельное лицо или коллектив), называемого «*оперирующей стороной*», который формулирует цель операции или получает директивы извне и в интересах которого она проводится. Цель операции - обычно некоторый внешний (*экзогенный*) элемент, который считается заданным.

Наряду с субъектом мы всегда имеем дело еще с «*исследователем операции*» - аналитиком. Он действует в интересах оперирующей стороны, и его задача состоит в том, чтобы найти способ использования ресурса, обеспечивающий достижение некоторой цели. Исследователь входит в состав оперирующей стороны, но его роль ограничивается подготовкой рекомендаций, вытекающих из изучаемой модели.

*Активными средствами проведения операции называется совокупность материальных, энергетических, денежных, трудовых и других ресурсов, а также организационных возможностей, используемых оперирующей стороной для обеспечения успешного хода операции и достижения ее цели.* Очевидно, оперирующая сторона должна обладать определенной свободой выбора активных средств и способностью как-то влиять на развитие событий, так как в противном случае операция перестает быть управляемой, а оперирующая сторона становится пассивным наблюдателем.

*Стратегиями оперирующей стороны в данной операции называются допустимые способы расходования ею имеющихся активных средств.* Здесь слово *«допустимые»* следует понимать как *«не выходящие за пределы технических, организационных, физических возможностей».* Среди допустимых обычно находятся и оптимальные стратегии, превосходящие остальные по каким-либо признакам. Оптимальные стратегии должны представлять первоочередной интерес для оперирующей стороны.

*Действующими факторами операции называются объективные условия и обстоятельства, определяющие ее особенности и непосредственно влияющие на ее исход.* Различают факторы определенные (точно известные) и неопределенные (имеющие вероятностную природу или проявляющиеся беспорядочно). Все они разделяются на контролируемые и неконтролируемые оперирующей стороной, причем неконтролируемыми обычно бывают неопределенные факторы. Наличие контролируемых факторов указывает на возможность управления ходом операции. Совокупность действующих факторов всегда характеризует обстановку, в которой проводится та или иная операция.

*Критерием эффективности операции называется показатель требуемого, ожидаемого, достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и целью операции.* Важнейшей функцией критерия является сравнительная оценка различных стратегий до начала их реализации. Его используют также на завершающем этапе операции для характеристики полученных результатов. Как правило, интерес представляют стратегии, позволяющие достичь максимальных (минимальных) значений критерия, если последний имеет численное выражение. Следовательно, необходимо тщательно отбирать критерии во избежание ошибочных интерпретаций цели операции и неоправданного расходования активных средств.

*Состоянием операции в некоторый момент времени t называется совокупность ее характеристик, проявляющихся в этот момент и отражающих объективно сложившееся положение дел.* Всякая операция представляет собой процесс, существующий во времени, проходящий различные этапы развития и завершающийся получением конечного результата, сопоставимого с исходной целью. Обычно этот процесс как-то проявляет себя, обнаруживает некоторые свойства и поэтому может подвергаться воздействиям оперирующей стороны. Если подобные проявления измеримы и допускают количественную оценку, то можно говорить о них как о варьируемых параметрах, формально отражающих ход операции и называемых обычно *фазовыми переменными*.

Эту дисциплину нельзя считать чисто математической. Главным ее содержанием являются сложные проблемы принятия решений, при изучении которых неформальные методы, представления здравого смысла и способы описания, т.е. математическая формализация задач, играют не менее важную роль, чем формальный математический аппарат.

Таким образом, *исследование операций есть синтетическая дисциплина, в которой можно выделить три главных направления исследования:*

*Построение модели,* то есть формализация изучаемого явления или процесса. Оно сводится к описанию процесса на языке математики. На этом этапе речь идет о построении модели процесса, но не операции. С помощью одной и той же модели могут изучаться различные операции.

Чтобы построить математическую модель, необходимо оценить количественно проявления рассматриваемых факторов и указать группы изменяемых параметров, формально представляющих эти факторы. Однако следует иметь в виду, что никаких правил построения математических моделей не существует. Каждая модель есть проявление знаний, опыта, искусства оперирующей стороны. Процесс создания модели требует четкого осознания цели операции, проникновения в сущность моделируемых явлений, умения отделять главное от второстепенного. Математические модели могут иметь вид формул, систем уравнений или неравенств, а также таблиц, числовых последовательностей, геометрических образов, отражающих зависимости между критерием эффективности операции и теми параметрами, которые представляют учтенные действующие факторы.

*Описание операции - постановка задачи.* Оперирующая сторона формулирует цель операции. Цель операции - всегда внешний фактор по отношению к операции и должна быть формализована. Задача исследователя операции - провести необходимый анализ неопределенностей, ограничений и сформулировать некоторую оптимизационную задачу

$$f(x) \to \max, \qquad x \in G \qquad (1)$$

Здесь $x$ - элемент некоторого нормированного пространства, определяемого природой модели, Язык оптимизации оказывается здесь естественным и удобным но вовсе не единственно возможным. Представление цели в виде (1) не единственный способ формализации.

*Решение возникающей оптимизационной задачи.* Строго говоря, только этот третий этап исследования операций можно отнести собственно к математике, хотя без участия математики успешное выполнение первых двух этапов невозможно.

***Тема 2. Выбор решений по многим критериям.***

*Неопределенность целей. Способы преодоления. Компромиссы Парето. Природные неопределенности. Принцип наилучшего гарантированного результата. Активный партнер. Ситуация равновесия. Принцип устойчивости Нэша. Кибернетические системы. Системы Гермейера.*

Задачи, не содержащие неопределенностей, являются скорее исключением, чем правилом. Адекватное описание реальности практически всегда содержит различного типа неопределенности, отражающие то естественное положение, в котором находится исследователь. Любое его знание относительно и неточно. В исследовании операций принято различать три типа неопределенностей:

- *неопределенность целей;*
- *неопределенность знаний об окружающей обстановке (неопределенность природы);*
- *неопределенность действий реального противника или партнера.*

Чаще всего возникает вопрос о формулировании единой цели при многих критериях.

$$f_1(x) \to \max, \ldots, f_n(x) \to \max$$

При этом ресурса для их достижения явно не хватает.

И хотя математика не может дать однозначного ответа на этот вопрос, она может помочь принять решение и сделать правильный выбор. Это и есть проблема неопределенности цели или проблема многокритериальности. Отсюда исследование операций опирается не только на математический аппарат, но и на методы преодоления неопределенностей. Эта проблема - центральная проблема принятия решений в условиях неопределенности.

Рассмотрим случай, когда перед исследователем операции стоит задача выбора действий (вектора **x**), обеспечивающего максимум функциям $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ одновременно.

В некоторых случаях вместо **n** частных критериев $f_i(x)$ предлагается рассматривать один критерий вида:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(x) \qquad (2)$$

$c_i$ - положительные числа, причем $\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$.

Такой способ свертки вводит по существу отношение эквивалентности разных критериев, т.к. величины $c_i$ показывают, насколько изменяется целевая функция (2) при изменении критерия $f_i(x)$ на единицу, т.е. $c_i = \dfrac{\partial F}{\partial f_i}$.

Коэффициенты $c_i$ есть результат экспертизы. Они отражают представление оперирующей стороны о содержании компромисса, который она вынуждена принять. Таким образом, содержание компромисса состоит в ранжировании целей, которые вместе с назначением весовых коэффициентов $c_i$ и являются той дополнительной гипотезой, которая позволяет свести задачу со многими критериями к задаче с единственным критерием, определяемым формулой (2).

Очень часто в задачах планирования и проектирования задается некоторая система нормативов $f_1^*, f_2^*, \ldots, f_n^*$. Это значит, что параметры будущего плана должны быть таковы, чтобы максимизировать функции $f_i(x)$ при условиях

$$f_i(x) \geq f_i^*, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

В таких случаях целевую функцию удобно представить в виде

$$F(x) = \min \frac{f_i(x)}{f_i^*} \qquad (3)$$

и искать вектор **x**, который обеспечивает $F(x) \to \max$. Смысл состоит в том, что при данном значении вектора **x** величина $F(x)$ дает нам значение наихудшего из показателей $f_i(x)$. Значит условие $F(x) \to \max$ означает выбор такой системы конструктивных параметров **x**, которая максимизирует отношение **i**-го реально достигнутого значения критерия к его контрольному значению. Если $f_i^*$ жестко не заданы, то они могут быть определены в результате экспертного опроса.

Смысл рассмотренных способов свертывания критериев достаточно очевиден. Одну задачу заменяют другой, причем в правомочности подобной замены и состоит содержание новых гипотез.

Но к анализу многокритериальных задач можно подойти и с других позиций, попытавшись сократить множество исходных вариантов, исключив из неформального анализа те варианты решений, которые заведомо будут плохи. Один из таких путей был предложен итальянским экономистом В. Парето в 1904 году.

Предположим, что сделан некоторый выбор. Обозначим его через $x^*$ и предположим, что существует некоторый другой выбор $\hat{x}$ такой, что для всех критериев $f_i(x)$ имеет место неравенство

$$f_i(\hat{x}) \geq f_i(x^*), \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (4)$$

причем хотя бы одно неравенство строгое.

Очевидно, что $\hat{x}$ предпочтительнее $x^*$. Поэтому все векторы $x^*$, удовлетворяющие (4), следует сразу исключить из рассмотрения. Имеет смысл подвергать неформальному анализу только те векторы $x^*$, для которых не существует $\hat{x}$ такого, что для всех критериев удовлетворяются неравенства (4).

*Множество всех таких значений* $x^*$ *называют множеством Парето, а вектор* $x^*$ *называют неулучшаемым вектором результатов (вектором Парето), если из (4) для любого* **i** *следует* $f_i(\hat{x}) = f_i(x^*)$.

В теории принятия решений существует термин <u>принцип Парето</u>, *заключающийся в том, что выбирать в качестве решения следует только тот вектор* **x**, *который принадлежит множеству Парето.*

Принцип Парето не выделяет единственное решение, а только сужает множество альтернатив. Окончательный выбор остается за лицом, принимающим решение.

Неопределенность цели не единственный тип неопределенности. Второй тип неопределенности будем называть неопределенностью природы. Эта ситуация является типичной и для ее описания принята вполне формализованная схема. Целевую функцию записывают в виде

$$T = f(x,a) \tag{5}$$

где $a \in G_a$ - некоторый параметр или функция, которую мы заранее не знаем, и не можем контролировать. Выбор **x** - способа действия, очевидно, существенно зависит от этого **a**.

Таким образом, говоря о природной неопределенности, следует иметь в виду, что целевая функция задана не совсем точно, т.к. содержит неопределенный параметр.

В реальных ситуациях информация о параметре **a** обычно имеет вид $a \in G_a$, где $G_a$ - некоторое множество. Но подобной информации также недостаточно для однозначного решения задачи. Обозначим множество неопределенностей результата $G_x$. Тогда

$$x(a) \in G_x \tag{6}$$

есть важная характеристика изучаемого решения задачи $T \to \max$, но его построение сопряжено с большим объемом сложных вычислений.

В тоже время есть еще один подход, который дает строгую, но одностороннюю оценку. Это так называемый <u>*принцип наилучшего гарантированного результата.*</u>

Так как для любого **x**

$$\min_{a \in G_a} f(x,a) \le f(x,a) \tag{7}$$

то гарантирующей стратегии необходимо решить и для любого $a \in G_a$

$$f^* = \max_x(\min_{a \in G_a} f(x,a)) \le \max_x f(x,a) \tag{8}$$

*Число* $f^*$, *определенное (8), называется гарантированной оценкой, а соответствующее этому числу* $x = x^*$ *- гарантирующей стратегией.*

Для получения гарантирующей стратегии необходимо решить следующие задачи оптимизации:

1). Вычислить $\min\limits_{a \in G_a} f(x,a)$ для любого **x**. В результате будут найдены $a = a^*(x)$ и $f(x) = f(x, a^*(x))$.

2). Вычислить $\max\limits_{x} f(x, a^*(x))$, в результате чего будут определены $x = x^*$ и $f^* = f^*(x^*)$.

Выбор гарантирующей стратегии поведения - это рациональный способ принятия решения. В результате использования этой стратегии мы гарантируем себя от всяких случайностей.

Следующая неопределенность связана с существованием активных партнеров или противников, действия которых полностью не контролируются. Формально такая ситуация включает в себя проблему многокритериальности, требующую отыскания вектора **x**, при котором достигается максимум критериев $f_i(x)$.

Рассмотрим ситуацию на примере двух субъектов. Пусть два субъекта А и Б, располагающие возможностью выбора векторов **x** и **y**, стремятся к достижению своих целей

$$f(x,y) \to \max, \qquad \varphi(x,y) \to \max, \qquad x \in X, \;\; y \in Y$$

В частности может оказаться, что $f = -\varphi$, тогда такая ситуация называется антагонистической. Наиболее типичен конфликт, в котором интересы партнеров или противников не совпадают, но и не строго противоположны.

*Общий случай нетождественности интересов или целей партнеров называется конфликтом.*

В связи с тем, что исход выбора зависит от выбора другого субъекта, необходимо принять ту или иную гипотезу о его поведении, которое зависит от характера информированности этого субъекта.

Одним из способов раскрытия неопределенности цели является рассмотренный выше принцип Парето, который определяет условия, которым должен удовлетворять разумный компромисс. Одна из проблем, возникающих при изучении конфликтных ситуаций со многими субъектами это проблема коллективных решений, коллективного формирования компромисса. Обсуждая правильность коллективных решений, следует иметь в виду только варианты, принадлежащие множеству Парето. Эти варианты обладают тем свойством, что улучшить значение целевой функции какого-либо субъекта можно только за счет других субъектов.

Кроме принципа Парето, существуют и другие принципы. Рассмотрим один из них, который называется принципом устойчивости или принципом равновесия.

Рассмотрим антагонистический конфликт двух лиц. Пусть цель субъекта А определяется соотношением

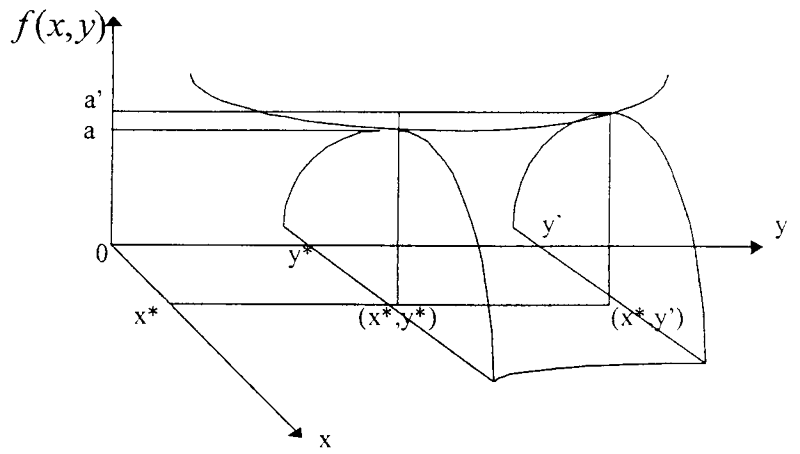
$$f(x,y) \to \max_{x \in X} \tag{9}$$

Цель субъекта Б

$$f(x,y) \to \min_{y \in Y} \tag{10}$$

В данной ситуации речь идет о глобальных экстремумах на соответствующих множествах. Главная задача - сформулировать рекомендации о способах выбора одновременно для обоих субъектов.

Предположим, что на прямом произведении множеств **X** и **У** функция $f(x,y)$ имеет седловую точку.




В этой точке имеет место очевидное равенство, являющееся определением седловой точки:

$$f^* = \max_{x\in X}\left\{\min_{y\in Y} f(x,y)\right\} = \min_{y\in Y}\left\{\max_{x\in X} f(x,y)\right\} \qquad (11)$$

Обозначим через (**x*,y***) координаты седловой точки. Очевидно, что никому из субъектов не имеет смысла, не выгодно выбирать в качестве своей стратегии какую-либо другую точку кроме **x*** или **y***. Если, например, Б выберет **y'**, то минимум, который он может себе обеспечить при разумном поведении А (т.е. А выберет **x***) будет **a'>a**. В этом смысле седло является точкой устойчивого выбора. Если существует две седловые точки (**x*,y***) и $(\hat{x},\hat{y})$, то можно доказать, что точки $(x^*,\hat{y})$, $(\hat{x},y^*)$ также являются седловыми, причем

$$f^* = f(x^*,y^*) = f(\hat{x},\hat{y}) = f(x^*,\hat{y}) = f(\hat{x},y^*)$$

Если седловых точек несколько, то каждый из субъектов может использовать любую из стратегий $\hat{y}$ или $y^*$, $\hat{x}$ или $x^*$. На этом основании возник так называемый <u>*принцип устойчивости Нэша*</u>, который сводится к утверждению о том, *что выбор рациональной стратегии должен производиться среди множества точек равновесия, то есть седловых точек, т.к. если субъект отступит от своего равновесного значения, отличного от $x^*$ или $y^*$ при условии, что остальные сохранят свой выбор, то проиграет прежде всего он сам, так как $f(x,y^*) \le f(x^*,y^*)$ или $f(x^*,y) \le f(x^*,y^*)$.*

Предположим, что динамический процесс определяется действиями нескольких субъектов, в распоряжении которых имеются управления: u,v,w,... Тогда

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,u,v,w,\ldots,\xi), \qquad (12)$$

где $\xi(t)$ - случайная вектор-функция, причем управления будут выбираться из

$$\int_0^T F_1(x,u,v,w,\ldots,\xi,t)dt \to \min$$

условий вида: $\int_0^T F_2(x,u,v,w,\ldots,\xi,t)dt \to \min$ каждое из которых отражает вполне

------------------------

определенные интересы того или иного субъекта. Эти модели описывают класс систем, которые называются кибернетическими.

С кибернетической системой, в отличие от управляемой, ассоциируется не один какой-либо субъект, а целая группа субъектов, обладающих собственными целями. Каждый из субъектов имеет возможность оказывать влияние на систему в целом, изменять характер ее движения в своих собственных интересах. Кибернетические системы описываются чаще всего дифференциальными уравнениями, если они не статические.

Будем считать, что кибернетическая система описывается уравнением (12). Для того, чтобы сделать просчет какой-либо траектории системы необходимо не только задаться той или иной моделью обстановки, т.е. сформулировать гипотезы о природе вектор-функции $\xi(t)$, но и сделать какие-то предположения о величинах управляемых воздействий, которые находятся в распоряжении других субъектов. Будем исходить из того, что у каждого субъекта существует некоторая объективная цель

$J_i \to \max$

Но дело в том, что эта цель как правило неизвестна. Более того ее может не знать и сам субъект с номером ***i***.

Предположим, что нами сформулирована гипотеза о характере целей субъектов. Этого мало. Действия субъекта будут еще зависеть от его информированности о том, что думают другие субъекты кибернетической системы о целях нашего субъекта, с позиций которого нами ведется анализ. Таким образом, выбор управления u(t), v(t),...будет определяться не только целью $J_i \to \max$ и заданием обстановки $\xi(t)$, но и изучением разного рода рефлексий на наши действия.

В кибернетических системах с иерархической организацией их участники не равноправны. Однако существует обширный класс кибернетических систем, в которых все субъекты равноправны и в которых какая-либо иерархия отсутствует в принципе. К их числу относятся все системы, которые описывают международные конфликты, эволюцию экологических условий и др. Функционирование таких систем требует принятия коллективных решений, поэтому они не могут быть описаны с помощью иерархических схем.

Главная проблема в теории подобных систем - это нахождение разумных условий компромисса. Было показано, что одним из основных принципов является принцип Парето. Но принадлежности к множеству Парето еще недостаточно для формирования компромисса. Мы определили также принцип устойчивости Нэша. Если компромисс удовлетворяет принципу Нэша, то субъектам, принявшим компромисс, невыгодно отступать от своих обязательств, т.к. субъект, нарушивший условие компромисса, будет нести потери.

Ю.Б.Гермейером и И.А. Вателем был изучен новый важный класс систем, в которых эффективный компромисс содержит устойчивые выборы. Была изучена ситуация, которая в теории исследования операций получила название *"путешественники в одной лодке"*.

Пусть в системе имеется N равноправных партнеров, каждый из которых обладает определенными собственными целями. Но помимо собственных целей все они обладают общей одной целью. Это обстоятельство требует от каждого из субъектов, чтобы он во имя достижения общей цели поступился частью своих интересов.

Пусть целевые функции партнеров $f_i(x_i)$, $i = 1,...,N$. Общая цель описывается функцией $F = F(y_1,...,y_N)$, где $y_i$ - ресурс, выделяемый i-м партнером для достижения общей цели. Таким образом имеем

$$F(y_1,...,y_N) \to \max, \qquad f_i(x_i) \to \max \qquad (13)$$

Здесь $x_i + y_i = a_i$ - суммарный ресурс, находящийся в распоряжении i-го партнера. Анализ подобной конфликтной ситуации начинается со сведения векторного критерия (13) к некоторому скалярному критерию. Положим

$$J_i = \Psi(f_i(x_i), F(y_1,...,y_N)) \qquad (14)$$

где $\Psi$ - некоторый оператор свертки критериев (13).

*Кибернетические системы с критериями вида (14) будем называть гермейеровскими.*

Для статических гермейеровских систем справедлива следующая теорема.

**Теорема Гермейера-Вателя.** *Пусть $f_i, F$ - монотонно возрастающие функции своих переменных. Тогда существуют устойчивые решения, среди которых по меньшей мере одно является эффективным.*

***Тема 3. Детерминированные модели операций. Оптимальное планирование при ограниченных ресурсах.***

*Постановка и классификация задач математического программирования. Линейное программирование. Общие свойства задачи. Симплекс метод. Этапы поиска решения. Двойственность в линейном программировании. Проблема зацикливания. Целочисленные решения.*

*Классические условия экстремума. Метод множителей Лагранжа. Проблема обобщения метода множителей. Теорема Куна-Таккера. Квадратичное программирование. Метод Вольфа. Динамическое программирование как метод оптимизации. Общая характеристика. Задачи с сепарабельной целевой функцией.*

*Сетевой график комплекса работ. Основные характеристики. Формальные оценки параметров плана. Оптимизационные задачи. Модель научных разработок. Рациональное расходование ресурсов. Выбор начальных норм времени. Выполнимость планируемых мероприятий. Организация работ неопределенной длительности.*

*Под математическим программированием понимают совокупность методов решения задач получения максимального или минимального значения функции f(x) на заданном множестве M евклидового пространства $E_n$, а также значений $x^* \in M$, на которых соответствующее экстремальное значение достигается.*

Предположим, что множество M определяется конечной системой равенств и неравенств. Математически такая задача может быть записана в виде:

$$f(x) \to \max/\min$$

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x) \le 0, \qquad i = \overline{1,m}; \\ &\varphi_j(x) = 0, \qquad j = \overline{1,p}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Если хотя бы одна из функций задачи (1) не линейна, то соответствующую задачу будем называть задачей нелинейного программирования.

Основное влияние на выбор способа решения оказывают свойства целевой функции $f(x)$ и ограничивающих функций. Свойства функций можно разбить на локальные и глобальные. К локальным свойствам функции относят степень ее гладкости, связанную с ее непрерывностью, существованием ее частных производных и градиента. Будем считать, что функция $f(x)$ принадлежит к классу непрерывно дифференцируемых функций.

Основным глобальным свойством функций является свойство выпуклости. Основное свойство, облегчающее исследование задач математического программирования для выпуклых функций, определенных на выпуклых множествах, - их одноэкстремальность.

*Задачу (1) назовем одноэкстремальной, если любой ее локальный экстремум является глобальным.*

Пусть дана каноническая задача линейного программирования.

$$\begin{cases} CX = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \max \\ AX = A_1x_1 + \ldots + A_nx_n = A_0 \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Если нам известна какая-нибудь вершина (опорный план) и значение целевой функции в ней, то все те вершины, в которых целевая функция принимает худшее значение нам заведомо не нужны. Поэтому естественно попытаться найти такой способ перебора вершин, при котором переход осуществляется от данной вершины к лучшей, а от нее - к еще более лучшей и т.д. Такой способ должен быть очевидно дополнен каким-то признаком того, что лучших, чем найденная, вершин вообще нет и признаком того, что данная задача вообще не имеет оптимального решения.

В этом и заключается суть наиболее широко применяемого в настоящее время *симплекс-метода*, или *метода последовательного улучшения плана* для решения задач линейного программирования.

Отсюда определяется алгоритм симплекс-метода. Пусть рассматриваемая задача заведомо имеет непустое допустимое множество с вершинами. Тогда:

1. Тем или иным способом находят какую-нибудь одну вершину допустимого множества и по определенному правилу проверяют, не является ли она оптимальной. Если она оптимальна - задача решена. Если нет, то необходимо выполнить следующий пункт.

2. По определенному правилу проверяют, нельзя ли утверждать, что задача не имеет оптимального решения. Если утверждать это можно, то задача неразрешима. Если нельзя, то необходимо выполнить следующий пункт.

3. По определенному правилу отыскивают новую, лучшую вершину и возвращаются к п.1, принимая в качестве рассматриваемой эту новую вершину.

Гарантируется, что описанный процесс через конечное число переходов к новой вершине закончится, ввиду их конечности, либо на п.1, либо на п.2.

Для задачи (2) построим следующую задачу. Свободные члены системы ограничений-равенств задачи (2) превратим в коэффициенты целевой функции, а столбцы матрицы системы ограничений-равенств транспонируем в строки. Коэффициенты целевой функции (2) сделаем свободными членами системы ограничений-равенств. Уравнения системы ограничений-равенств заменим неравенствами, максимум целевой функции заменим на минимум. В результате получим задачу

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_m y_m \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \ldots + a_{m1} y_m \geq c_1 \\ ------------------ \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \ldots + a_{mn} y_m \geq c_n \end{cases} \qquad (3)$$

Таким образом задача (3) получается как бы трансформированием задачи (2). Ограничения на знак переменных в задаче (3) отсутствуют.

*Задача (3) называется несимметричной двойственной задачей для задачи (2).*

Несложно показать, что задача (2) является двойственной для задачи (3).

Результаты исследований, связанные с двойственностью, оказались центральной частью теории линейного программирования. Из них вытекают многие другие результаты, как теоретические, так и практические, на них базируются некоторые эффективные методы решения задачи линейного программирования.

**1 теорема двойственности.** *Если одна из задач, (2) или (3), имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение, причем их оптимумы совпадают.*

*Если целевая функция одной из задач, (2) или (3), не ограничена сверху (соответственно снизу) на своем допустимом множестве, то другая задача не имеет допустимого решения.*

**2 теорема двойственности.** *Допустимые решения* $\overline{X} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ *и* $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m})$ *задач (2) и (3)(соответственно) тогда и только тогда являются оптимальными решениями этих задач (соответственно), когда для каждого выполняется равенство:*

$$(a_{1j} \overline{y_1} + \ldots + a_{mj} \overline{y_m} - c_j) \overline{x_j} = 0 \qquad (4)$$

Определим сначала понятие седловой точки функции. Пусть дана функция нескольких переменных, которые разбиты на две группы, например, $x_1, \ldots x_n$ и $y_1, \ldots, y_m$, так что функция имеет вид $F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ или $F(X,Y)$.

*Точка* $(\overline{X}, \overline{Y})$ *называется седловой точкой функции* $F(X,Y)$,*если* ***n****-мерная точка* $\overline{X} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$, *является точкой максимума функции* $F(X, \overline{Y})$, *где* $\overline{Y}$ *фиксированное значение Y, а* ***m****-мерная точка* $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m})$ *является точкой минимума функции* $F(\overline{X}, Y)$, *где* $\overline{X}$ *фиксированное значение X, так что для всех* ***x*** *и* ***y*** *выполняется неравенство:* $F(X, \overline{Y}) \leq F(\overline{X}, \overline{Y}) \leq F(\overline{X}, Y)$.

**Теорема Куна-Таккера.** *Вектор* $\overline{X} = (\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})$ *тогда и только тогда является оптимальным решением канонической задачи линейного программирования (1), когда существует такой* ***m****-мерный вектор* $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m})$, *что точка* $(\overline{X}, \overline{Y})$ *является седловой точкой для функции Лагранжа задачи (1) в области .*

Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &g_i(x) = 0; \quad i = \overline{1, m} \end{aligned} \qquad (5)$$

Проблема отыскания условного экстремума функции многих переменных была изучена еще Лагранжем, предложившим так называемый метод множителей Лагранжа для задачи (5). Идею метода рассмотрим на примере функции двух переменных в задаче (5). Пусть рассматриваемые функции непрерывно дифференцируемы и $g(x_1,x_2)$ разрешима относительно $x_2$, то есть $x_2=h(x_1)$. Требуется получить необходимые условия, которым должна удовлетворять точка локального экстремума функции $f(x_1,x_2)$.

Представляя $x_2=h(x_1)$ в $f(x_1,x_2)$ приходим к равенству $f[x_1,h(x_1)]=f(x_1)$. Ограничение $g(x_1,x_2)=0$ говорит о том, что из всех точек плоскости $x_1$, $x_2$ интерес представляют лишь те, которые лежат на линии, определяемой уравнением $x_2=h(x_1)$. Если в какой-либо из этих точек $f(x_1,x_2)$ достигает своего локального экстремума, то и $f(x_1)$ достигает экстремума, причем он не является условным, так как сам способ построения функции $f(x_1)$ предусматривает учет исходного ограничения и никаких дополнительных требований предъявлять не нужно. Следовательно, экстремальная точка $x_1^0$ находится из уравнения $\frac{df(x_1)}{dx_1}=0$. Учитывая, что

$$\frac{df(x_1)}{dx_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial h}\cdot\frac{dh}{dx_1} \quad \text{и} \quad \frac{dh}{dx_1}=-\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2} \quad \text{получаем} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}=0.$$

Обозначив отношение $\frac{\partial f/\partial x_2}{\partial g/\partial x_2}=\lambda$ и предположив $\frac{\partial g}{\partial x_2}\neq 0$, приводим предыдущее равенство в виду $\frac{\partial f}{\partial x_1}-\lambda\cdot\partial g/\partial x_1=0$. Поскольку из определения $\lambda$ следует и $\frac{\partial f}{\partial x_2}-\lambda\cdot\partial g/\partial x_2=0$, искомые необходимые условия существования экстремума могут быть представлены как

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}-\lambda\cdot\partial g/\partial x_1=0;\; \frac{\partial f}{\partial x_2}-\lambda\cdot\partial g/\partial x_2=0;\; g(x_1,x_2)=0. \qquad (6)$$

Совместное решение уравнений (6) относительно $x_1$, $x_2$ и $\lambda$ позволяет найти все точки, в которых ожидается локальный экстремум функции $f(x_1,x_2)$. Главное состоит здесь в том, что систему (6) можно получить более коротким и чисто формальным путем. Для этого достаточно составить сумму $\Phi(x_1,x_2,\lambda)=f(x_1,x_2)+\lambda g(x_1,x_2)$, а затем приравнять нулю частные производные $\partial\Phi/\partial x_1$, $\partial\Phi/\partial x_2$, $\partial\Phi/\partial\lambda$, считая $x_1$, $x_2$ и $\lambda$ независимыми переменными. Функция Ф называется функцией Лагранжа, а $\lambda$ - множителем Лагранжа. Суть метода множителей Лагранжа заключается именно в отыскании решений системы (6) с последующей проверкой достаточных условий экстремума во всех найденных точках, сравнении получаемых результатов и выборе наилучшего из них.

Обобщение условий (6) на случай задачи (5) получим, введя функцию Лагранжа в виде

$$\Phi(X,\Lambda)=f(X)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(X) \text{ где } X=\{x_1,...,x_n\},\quad \Lambda=\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$$

и приравняв ее частные производные по всем $X$ *и* $\Lambda$ к нулю.

Таким образом, для отыскания точек экстремума приходится решать систему $n+m$ уравнений причем необязательно требовать, чтобы каждое ее решение доставляло условный экстремум целевой функции.

Преимуществом рассматриваемого метода является то, что можно не учитывать взаимную зависимость переменных. Недостатком же является необходимость решения громоздких уравнений, что далеко не всегда удается. К тому же, встречаются случаи, когда экстремум целевой функции заведомо существует, а система уравнений неразрешима.

Необходимость принять решение возникает тогда, когда производятся те или иные целенаправленные действия. Если в какой-либо реальной задаче подобные ситуации возникают периодически, то образуется процесс принятия решений.

Вообще говоря, ход такого процесса заранее не определен. Его нужно организовать, причем так, чтобы получить наибольший эффект с точки зрения принятого критерия эффективности действий $z$, под которым будем понимать показатель требуемого, ожидаемого, достигнутого соответствия между результатом предпринимаемых действий и поставленной целью. Формально это должно означать стремление минимизировать или максимизировать величину указанного критерия, если, конечно, он имеет числовое выражение.

Предположим, что интересующий нас процесс можно разбить на $N$ шагов, а действия, совершаемые на $r$-м шаге, характеризуются совокупностью показателей $U_r = (u_{r1}, u_{r2}, \ldots, u_{rm})$.

Возникает вопрос: как выбрать $U_1, \ldots, U_N$, чтобы величина $z$ приняла экстремальное значение? Появляется идея провести оптимизацию поэтапно, анализируя последовательно каждый шаг процесса в поисках наилучших вариантов его продолжения. Эта идея лежит в основе метода динамического программирования, реализующего принцип последовательной оптимизации. Следовательно, важным условием применимости рассматриваемого метода является возможность разбиения процесса принятия решений на ряд однотипных шагов или этапов, каждый из которых планируется отдельно, но с учетом результатов, полученных на других шагах.

Динамическое программирование основывается на важных принципах *оптимальности* и *вложения*. Принцип оптимальности формулируется следующим образом:

*Необходимо всегда обеспечивать оптимальное, в смысле принятого критерия, продолжение процесса относительно уже достигнутого его состояния.*

Другими словами, решение на каждом последующем шаге должно приниматься с учетом результата, полученного на всех предыдущих шагах. Принцип вложения утверждает:

*Природа задачи, допускающей использование метода динамического программирования, не меняется при изменении количества шагов, т.е. форма такой задачи инвариантна относительно* $N$.

В этом смысле всякий конкретный процесс с заданным $N$ оказывается как бы вложенным в семейство подобных ему процессов и может рассматриваться с более широких позиций.

### *Тема 4. Игровые модели операций. Рациональное поведение в конфликтных ситуациях.*

*Определение игры. Разновидность игровых моделей. Антагонистическая игра в нормальной форме. Принцип гарантированного результата. Проблема равновесия в игре. Чистые и смешанные стратегии. Теорема о минимаксе. Устойчивость полученных решений. Способы поиска оптимальных стратегий. Общие подходы. Решения игр. Графоаналитический метод. Эквивалентные задачи линейного программирования. Разрешимость игровых задач.*

*Биматричная игра. Ситуация равновесия и поведение участников. Модель экологического конфликта. Варианты исхода игры. Проблемы и формы кооперирования. Понятие характеристической функции. Дележи в кооперативных играх. Принципы формирования решений. Модель финансирования строительства.*

Раздел исследования операций, связанный с математическим моделированием условий конфликта и поиском на этой основе оптимальных решений, называют теорией игр.

Термин *игра* будем употреблять только в значении *математическая модель конфликта*, а противоборствующие стороны будем считать лишенными каких-либо содержательных признаков.

Пусть участники конфликта известны и образуют множество $U$. Произвольно взятая сторона $C \in U$ располагает некоторым набором $S_C$ допустимых стратегий $S_C = \{s_{1C}, s_{2C}, \ldots\}$. Использование каждой стороной какой-либо из своих стратегий определяет один из возможных исходов конфликта, принадлежащий множеству $J$ всех возможных исходов. В общем случае какие-то комбинации применяемых стратегий могут оказаться недопустимыми, поэтому число элементов $J$ предсказать заранее нельзя, оно выявляется лишь в конкретных моделях.

Нельзя отождествлять, вообще говоря, оперирующие и заинтересованные стороны. Поэтому вместе с множеством $U$ необходимо рассматривать и множество $\overline{U}$, образуемое теми лицами и коллективами, которые проявляют определенное отношение к возможным исходам данного конфликта, участвуя или не участвуя в нем непосредственно.

Можно утверждать, что каждая заинтересованная сторона $\overline{C} \in \overline{U}$ предпочитает одни исходы другим, т.е. устанавливает отношения предпочтения на множестве $J$. В формальной записи это выглядит как $u_1 \Pi\overline{C} u_2$.

Для количественных оценок требуется задавать на множестве $J$ числовую функцию выигрыша $\Pi\overline{C}(u)$, называемую еще платежной функцией. Она определяет размеры выигрыша (положительного или отрицательного), получаемого стороной $\overline{C} \in \overline{U}$ от исхода $u \in J$. В этом случае отношение $u_1 \Pi\overline{C} u_2$ можно выразить неравенством $\Pi\overline{C}(u_1) > \Pi\overline{C}(u_2)$.

Таким образом, общее формальное описание конфликтной ситуации состоит в том, что определяется система $T$, объединяющая перечисленные компоненты $U$, $S_C$, $J$,…, то есть $T = \left\langle U, \{S_C\}_{C \in U}; J; \overline{U}; \left\{\Pi\overline{C}\right\}_{C \in U} \right\rangle$, и называемая игрой.

В ходе игры может возникнуть бескомпромиссная ситуация, когда все, что выигрывает один, проигрывает второй, иногда стороны могут объединить свои усилия, вести переговоры между собой, заключать соглашения в интересах достижения личных и общих целей.

Таким образом, главным в теории игр является принцип рационального выбора сторонами своих действий. Решающая роль здесь принадлежит информации, которой располагают стороны. В теории игр рациональный выбор в первую очередь связан с выбором системы платежных функций, которые при исследовании конкретной задачи считаются заданными.

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функции выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры.

В зависимости от числа игроков различают игры с двумя, тремя и более участниками. В принципе возможны игры с бесконечным числом игроков. Если в игре участвуют несколько сторон, игра называется стратегической, а если в игре один игрок, но несколько заинтересованных сторон, то игра называется нестратегической. Во многих стратегических играх предполагается, что каждая оперирующая сторона является одновременно и заинтересованной стороной и тогда они называются бескоалиционными играми. Здесь исключено возникновение коалиции участников игры на основе совпадения их целей и интересов.

По количеству стратегий различают конечные и бесконечные игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий. Сами стратегии в конечных играх называют чистыми стратегиями. Соответственно, в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий. Конечные игры удобно представлять в табличной (матричной) форме и их часто называют матричными играми.

Функция выигрыша называется еще платежной функцией. Важным случаем в теории игр является ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого. Подобные игры называют играми с нулевой суммой или антагонистическими играми.

В игре с ненулевой суммой уже становится необязательным, чтобы один из участников выигрывал, а другой проигрывал; напротив они могут выигрывать и проигрывать одновременно. Поскольку интересы игроков теперь не являются полностью противоположными, их поведение становится более разнообразным.

Игры с ненулевой суммой могут быть кооперативными и некооперативными. В некооперативных играх игроки принимают решения независимо друг от друга либо потому, что осуществление соглашения невозможно, либо потому, что оно запрещено правилами игры.

Один из подходов к решению некооперативной игры состоит в определении точек равновесия игры. В общем случае *пара стратегий X для 1-го игрока и У для 2-го игрока называется точкой равновесия по Нешу, если ни одному из игроков невыгодно отклоняться от своей стратегии в одиночку, т.е. если*

$$H_1(X, Y^*) \le H_1(X^*, Y^*) \text{ для любых } X \text{ и}$$

$$H_2(X^*, Y) \le H_2(X^*, Y^*) \text{ для любых } У.$$

Это определение равновесия сохраняется и для игры с любым количеством игроков.

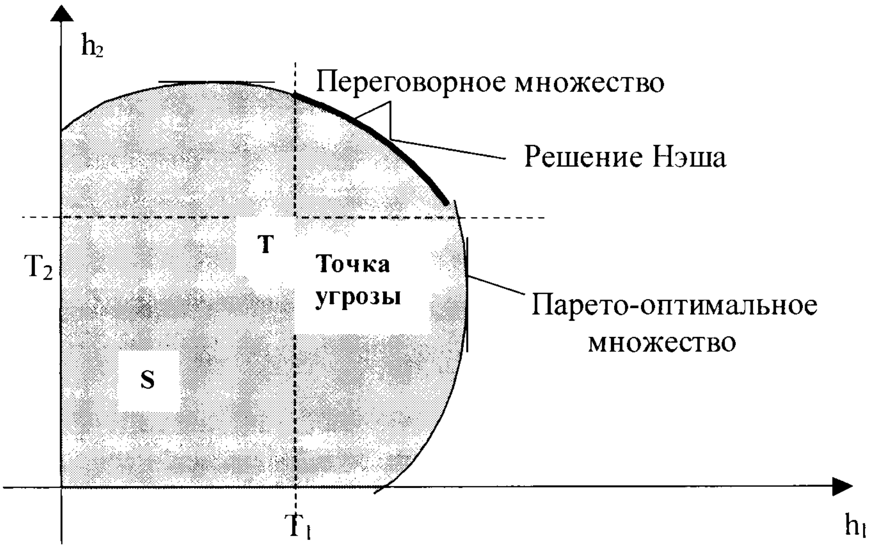
Доказано, что для любой конечной некооперативной игры с ненулевой суммой, называемой также *биматричной игрой*, всегда существует по крайней мере одна равновесная пара смешанных стратегий. В общем случае равновесие может быть неединственным, и каждому из них могут соответствовать различные значения выигрыша каждого из игроков.

Кооперативной игрой называется игра с ненулевой суммой, в которой игрокам разрешается обсуждать перед игрой свои стратегии и договариваться о совместных действиях, т.е. игроки могут образовывать коалиции.

Основная задача в кооперативных играх состоит в дележе общего выигрыша между членами коалиции. В случае игры двух лиц предполагается, что два игрока не могут воздействовать друг на друга, пока не придут к некоторому соглашению.

Таким образом игра определяется как множество S в пространстве переменных $h_1$, $h_2$, представляющее общие выигрыши. Кроме того, заданы два числа $T_1$, $T_2$, определяющие величины выигрыша, которые каждый из игроков может получить, не вступая в коалицию со своим партнером. Обычно предполагают, что множество S является замкнутым, выпуклым и ограниченным сверху.

*Точка T с координатами ($T_1$, $T_2$) называется точкой угрозы.*




На множестве возможных выигрышей выделяется *множество Парето-оптимальных решений, т.е. множество точек, принадлежащих S, для которых увеличение выигрыша одного из игроков возможно только за счет уменьшения выигрыша его партнеров.* Очевидно, что множество таких точек образует выделенная на рисунке граница множества S.

Все точки Парето-оптимального множества, находящиеся одновременно выше и правее точки угрозы T, образуют так называемое *переговорное множество.* Очевидно, что игрокам нет смысла договариваться относительно решений, не принадлежащих переговорному множеству, либо потому, что положение одного из партнеров может быть улучшено при сохранении положения его партнера и можно договариваться о более выгодных решениях, либо потому, что по крайней мере для одного из игроков теряет смысл вступать в коалицию со своим партнером – не худших результатов он может достичь и в одиночку.

Наконец на переговорном множестве выделяется точка решения Нэша N, в которой достигается максимум произведения превышения выигрышей каждого из игроков над платежами, которые могут быть получены без вступления в коалицию

$$\max(h_1 - T_1)(h_2 - T_2).$$

В теории игр показано, что если множество возможных платежей S выпукло, замкнуто и ограничено сверху, то точка Нэша N существует и единственна. Точка Нэша представляет одно из возможных решений кооперативной игры, от которого нет оснований отказываться ни одному из игроков.

***Тема 5. Неполные модели операций. Способы действий в условиях ограниченной информированности.***

*Роль эксперимента в исследованиях. Критерий оценки получаемых результатов. Активные стратегии поиска экстремума. Сравнительная эффективность методов. Способы формирования стратегий в общем случае. Модели со случайными параметрами. Анализ точности решений. Влияние исходных данных. Методы случайного поиска.*

*Неформальные методы исследования операций. Эвристические решения. Специфика подхода к изучаемым проблемам. Деловые игры. Истоки, содержание, порядок подготовки. Элементы прогностики. Методология прогнозирования.*

***Литература***

1. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. – М.: Советское радио, 1973.
2. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.: Наука, 1964.
3. Ляшенко И.Н., Карагодова Е.А., Черникова Н.В., Шор Н.З. Линейное и нелинейное программирование. – Киев: Наукова думка, 1975.
4. Кудрявцев Е.М. Исследование операций в задачах, алгоритмах и программах. – М.: Радио и связь, 1984.
5. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Куржанский А.Б. Управление и наблюдения в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977.