

## РЕГУЛЯРНЫЕ $U$ -ИНВАРИАНТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. Кужель, доктор физико-математических наук, профессор

**1. Предварительные понятия и результаты.** Пусть  $A$  - эрмитов оператор с индексом дефекта  $(m, m)$  ( $m \leq \infty$ ), действующий в гильбертовом пространстве  $H$ ,  $U$  - некоторое множество унитарных в  $H$  операторов и такое, что из  $U \in \mathcal{U}$  следует  $U^* \in \mathcal{U}$ .

**О п р е д е л е н и е.** Оператор  $A$  называется  $U$ -инвариантным, если он коммутирует с любым оператором  $U$  из  $\mathcal{U}$ .

В работе Филиппа /3/ показано, что расширение по Фридрихсу  $U$ -инвариантного полуограниченного симметрического оператора  $A$   $U$ -инвариантно. С другой стороны, в той же работе построен пример  $U$ -инвариантного (относительно некоторого коммутативного семейства  $U$ ) симметрического оператора с индексом дефекта  $(1, 1)$ , не имеющего  $U$ -инвариантных самосопряженных расширений.

В работе Кочубея /1/ вопрос о существовании  $U$ -инвариантных самосопряженных расширений симметрического оператора  $A$  решается в терминах характеристической функции А.В.Штрауса /4/.

Здесь приводится отличное от первоначального обоснование теоремы Р.Филиппа, а также устанавливаются условия существования регулярных (в частности, самосопряженных)  $U$ -инвариантных расширений эрмитовых (не обязательно плотно заданных)  $U$ -инвариантных операторов.

В п.5 анализируется пример  $U$ -инвариантного симметрического оператора  $A$ , не имеющего  $U$ -инвариантных самосопряженных расширений. При этом отмечается особенность диссипативного расширения  $A_\lambda$  оператора  $A$ , определяемого равенством /27/, которая состоит в том, что точечный спектр оператора  $A_\lambda$  заполняет всю плоскость.

### 2. Некоторые общие свойства $U$ -инвариантных эрмитовых операторов.

**Предложение 1.** Пусть  $A$  - эрмитов  $U$ -инвариантный оператор. Тогда при любых  $U \in \mathcal{U}$  и  $\lambda \in \mathbb{C}$

$$U : D_A \rightarrow D_A, U : \mathfrak{N}_\lambda \rightarrow \mathfrak{N}_\lambda$$

где  $\mathfrak{N}_\lambda$  - дефектное подпространство оператора  $A$ .

□ Первое соотношение из /1/ вытекает из равенства  $AU = UA$  ( $\forall U \in \mathcal{U}$ ). Для доказательства второго соотношения из /1/ заметим, что при любых  $x \in D_A$  и  $x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda$  ( $(A - \lambda I)x, Ux_\lambda$ ) =  $(U^*(A - \lambda I)x, x_\lambda)$  =  $((A - \lambda I)U^*x, x_\lambda)$  = 0, и, следовательно,  $U : \mathfrak{N}_\lambda \rightarrow \mathfrak{N}_\lambda$  ■

**Лемма 2.** Замыкание  $U$ -инвариантного оператора также есть  $U$ -инвариантный оператор.

□ Пусть  $A$  -  $U$ -инвариантный оператор и  $\bar{A}$  - его замыкание. Тогда, если  $x_n \in D_A, x_n \rightarrow x$  и  $Ax_n \rightarrow y$ , то  $x \in D_A$  и  $y = \bar{A}x$ .

Пусть, далее,  $U \in \mathcal{U}$ . Так как  $Ux_n \rightarrow Ux$  и то  $Ux_n \in D_A$ , то  $A(Ux_n) = U(Ax_n) \rightarrow Uy$ . Но тогда  $Ux \in D_A$  и  $\bar{A}Ux = Uy = U\bar{A}x$ , то есть  $\bar{A}U = U\bar{A}$ . ■

**Теорема 3.** Если замкнутый  $U$ -инвариантный оператор  $A$  имеет хотя бы одну вещественную точку регулярного типа, то у оператора  $A$  существует  $U$ -инвариантное самосопряженное решение.

□ Пусть  $\lambda \in \pi(A) \cap \mathbb{R}$ , где  $\pi(A)$  — множество точек регулярного типа (см. напр., /2/. §1), идеалы  $D_A$  и  $\mathfrak{N}_\lambda$  линейно независимы. Рассмотрим на идеале  $D_A = D_A + \mathfrak{N}_\lambda$  эрмитов оператор  $\tilde{A}$ , определяемый равенством  $\tilde{A}(x_0 + x_\lambda) = \tilde{A}x_0 + \lambda x_0 (x_0 + D_A x_\lambda \in \mathfrak{N}_\lambda)$ . На основании предложения 1 оператор  $\tilde{A}$  является  $U$ -инвариантным.

Кроме того, рассуждая так же, как и в /2/ (§3, доказательство теоремы фон Неймана) убеждаемся, что эрмитов оператор  $\tilde{A}$  плотно определен и его дефектные числа равны нулю. Замыкание этого оператора есть самосопряженный оператор, который, на основании леммы 2, является  $U$ -инвариантным. ■

### 3. Полуограниченные операторы. Теорема Филиппса.

Теорема 4. Фридрихсово расширение  $U$ -инвариантного полуограниченного симметрического оператора  $A$   $U$ -инвариантно.

□ В соответствии с пунктом 3.1 без ограничения общности можем считать, что оператор  $A$  удовлетворяет условию (см. /2/ §3)

$$(Ax, x) \geq (x, x) \quad (x \in D_A)$$

Пусть  $(\cdot, \cdot)_0$  — скалярное произведение, определяемое на идеале  $D_A$  равенством

$$(x, y)_0 = (Ax, y) \quad (\{x, y\} \subset D_A) \quad /2/$$

Если  $U \in U$ , то на основании /1/  $U: D_A \rightarrow D_A$

При этом  $(Ux, Uy)_0 = (AUx, Uy) = (UAx, Uy) = (x, y)_0$ .

Таким образом,  $U$  есть унитарный оператор в предгильбертовом пространстве  $D_A$ . Расширяя оператор  $U$  по непрерывности на все пространство  $D_0$ , получим унитарный оператор  $U_0$ , действующий в  $D_0$  (относительно пространства  $D_0$  (см. /2/ §3). При этом, если  $x \in D_0$  и  $x_n \rightarrow x/x_n \in D_A$ , то

$$\|Ux_n - Ux\| = \|x_n - x\| \leq \|x_n - x\|_0 = \|Ux_n - U_0x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

и, следовательно,  $Ux_n \rightarrow Ux$ . А это означает, что  $U_0x = Ux$ , то есть  $U_0$  есть сужение оператора  $U$  на идеал  $D_0$ .

Итак, оператор  $U_0 = U/D_0$  является унитарным оператором в гильбертовом пространстве  $D_0$ . Кроме того, так как  $U^* \in U$ , то, по аналогии с предыдущим,  $U^*: D_0 \rightarrow D_0$ . При этом если  $y \in D_A$ ,  $x \in D_0$  то,

$$(U^*x, y)_0 = (x, Uy)_0 = (x, U_0y)_0 = (U^*x, y)_0,$$

откуда следует, что  $U_0^* = U^*/D_0$ .

Пусть  $\tilde{A}$  — расширение по Фридрихсу оператора  $A$ . На основании равенства (3.27) из /2/

$$\tilde{A}x = A^*x \quad (D_A = D_A \cap D_0).$$

Поэтому, в соответствии с равенством  $(\tilde{A}x, y)_0 = (x, y)_0$  при любых  $x$  и  $y$  из  $D_0$

$(U\tilde{A}x, y) = (\tilde{A}x, U^*y) = (x, U^*y)_0 = (U_0x, y)_0 = (\tilde{A}Ux, y)$  и, таким образом,  $U\tilde{A} = \tilde{A}U$ . ■

4. Условия существования регулярных  $U$ -инвариантных расширений в терминах формул фон Неймана. Пусть  $A$  — эрмитов  $U$ -инвариантный оператор,  $B$  — регулярное расширение оператора  $A$  и  $\lambda \in \sigma_\rho(B) / \text{Im} \lambda \neq 0 /$ . Тогда произвольный вектор  $x$  из  $D_B$  представим в виде (см. /2/, §5)

$$x = x_0 + x_\lambda + \Phi x_\lambda \quad (x_0 \in D_A, x_\lambda \in D_\Phi) \quad /3/$$

где оператор  $\Phi$  действует из  $\mathfrak{N}_\lambda$  в  $\mathfrak{N}_\lambda$ . При этом

$$Bx = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda + \lambda\Phi x_\lambda \quad /4/$$

**Теорема 5.** Регулярное расширение  $B$   $U$ -инвариантного эрмитова оператора  $A$ , определяемое равенствами /3/ и /4/, является  $U$ -инвариантным тогда и только тогда, когда  $U$ -инвариантным является оператор  $\Phi$  в формулах /3/ и /4/.

□ Пусть оператор  $B$  является  $U$ -инвариантным. Тогда при любых  $U$  из  $U$  и  $x \in D_B$  вектор  $y = Ux \in D_B$ . При этом, на основании равенства /3/ и предложения 1,

$$y = y_0 + y_\lambda + U\Phi U^* y_\lambda \quad /5/$$

где  $y_0 = Ux_0 \in D_A$ ,  $y_\lambda = Ux_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ . А так как при фиксированном  $\lambda \in \sigma_\rho(B)$  оператор  $\Phi$  в /3/ определяется однозначно, то, на основании /3/ и /5/  $U\Phi U^* = \Phi$  то есть,

$$U\Phi = \Phi U \quad (\forall U \in U) \quad /6/$$

Очевидно, что и наоборот - если оператор  $\Phi$  удовлетворяет условию /6/, то, то оператор  $B$ , определяемый равенствами /3/ и /6/, является  $U$ -инвариантным.

**Теорема 6.** Пусть существует регулярное  $U$ -инвариантное расширение  $U$ -инвариантного эрмитова оператора  $A$ , определяемое равенствами /3/ и /4/. Если при этом оператор  $\Phi$  в указанных равенствах ограничен, определен на всем пространстве  $\mathcal{N}_\lambda$  и  $0 \in \rho(\Phi)$ , то существуют также и самосопряженное  $U$ -инвариантное расширение оператора  $A$ .

□ Пусть  $\Phi = V(\Phi)$  - полярное представление оператора  $\Phi$  и  $U \in U$ . Так как, по условию, оператор  $B$  является  $U$ -инвариантным расширением оператора  $A$ , то, на основании теоремы 5, оператор  $U$  коммутирует с  $\Phi$ . Но тогда оператор  $|\Phi| = \sqrt{\Phi^* \Phi}$ , который действует в подпространстве  $\mathcal{N}_\lambda$ , также коммутирует с  $U$ . Кроме того, с учетом условия теоремы оператор  $|\Phi|$  отображает  $\mathcal{N}_\lambda$  на  $\mathcal{N}_\lambda$ . Поэтому  $V$  является унитарным оператором, отображающим  $\mathcal{N}_\lambda$  на  $\mathcal{N}_\lambda$  и, очевидно,  $V$  коммутирует с  $U /U \in U/$ .

Рассмотрим оператор  $S$ , определяемый следующим образом: произвольный вектор  $x$  из  $D_S$  представим в виде

$$x = x_0 + x_\lambda + Vx_\lambda \quad (x_0 \in D_A, x_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda)$$

При этом  $Sx = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda + \lambda Vx_\lambda$ .

Заданный так оператор является самосопряженным и коммутирует с  $U$  то есть  $S$  - самосопряженное  $U$ -инвариантное расширение оператора  $A$ . ■

### 5. Условия существования самосопряженных $U$ -инвариантных расширений в терминах характеристической функции А. В. Штрауса

Пусть  $A$  - замкнутый эрмитов оператор,  $\lambda (\text{Im} \lambda < 0)$  - фиксированное число и  $\mathcal{N}_\lambda$  - дефектное подпространство оператора  $A$ . Как можно показать (см /4/) оператор  $A_\lambda$ , определяемый на линейале  $D_{A_\lambda} = D_A + \mathcal{N}_\lambda$  равенством

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda \quad /7/$$

где  $x_0 \in D_A$ , а  $x_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda$ , является максимальным диссипативным оператором. Если при этом оператор  $A$   $U$ -инвариантен то, очевидно, оператор  $A_\lambda$  также является  $U$ -инвариантным.

Пусть  $\mu / \text{Im} \mu < 0 /$  фиксированная точка. Так как  $\mu \in \rho(A_\lambda)$ , то, с учетом формул фон Неймана, вектор  $x = x_0 + x_\lambda$  из  $D_{A_\lambda}$  представим в виде

$$x = y_0 + y_\mu + \Phi y_\mu \quad /8/$$

где  $D_\Phi = \mathfrak{R}_\mu$  (в силу того, что оператор  $A_\lambda$  максимальный);  $\Phi: \mathfrak{R}_\mu \rightarrow \mathfrak{R}_\mu$  и, очевидно, при фиксированном  $\mu$  оператор  $\Phi$  зависит от  $\lambda: \Phi = \Phi_\lambda$ . При этом

$$A_\lambda x = Ay_0 + \bar{\mu}y_\mu + \mu\Phi y_\mu \quad /9/$$

На основании /8/ и /9/

$$(A_\lambda - \mu I)x = (A - \mu I)y_0 + (\bar{\mu} - \mu)y_\mu \quad /10/$$

Применяя к обеим частям равенства /10/ оператор  $(A_\lambda - \mu I)^{-1}$  и учитывая равенство  $Ay_0 = A_\lambda y_0$ , получим

$$x = y_0 + (\bar{\mu} - \mu) \quad /11/$$

Из равенства /11/ и /8/ следует, что

$$\Phi_\lambda y_\mu = -(A_\lambda - \bar{\mu}I)(A_\lambda - \mu I)^{-1}y_\mu \quad /12/$$

В работе А.В.Штрауса /4/ оператор

$$C(\lambda) = (A_\lambda - \bar{\mu}I)(A_\lambda - \mu I)^{-1} \quad /13/$$

назван характеристической функцией эрмитова оператора  $A$ . Таким образом, в случае оператора  $A_\lambda$  оператор  $\Phi_\lambda$  из соответствующих формул фон Неймана лишь знаком отличается от характеристической функции  $\tilde{N}(\lambda)$  эрмитова оператора  $A$ .

Теорема 7. Пусть при некоторых фиксированных  $\lambda / \text{Im}\lambda < 0 /$  и  $\mu / \text{Im}\mu < 0 /$   $0 \in \rho(C(\lambda))$

Тогда существует самосопряженное  $U$ -инвариантное расширение  $U$ -инвариантного эрмитова оператора  $A$ .

□ Действительно, если  $A$  - инвариантный эрмитов оператор и  $U \in U$ , то, на основании равенства /7/,  $A_\lambda$  коммутирует с  $U$ . Но тогда из равенства /13/ следует, что оператор  $C(\lambda)$  также коммутирует с оператором  $U$ . Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться равенством  $\Phi_\lambda = -C(\lambda)$  и теоремами 5 и 6.

6. Симметрический  $U$ -инвариантный оператор, не имеющий  $U$ -инвариантных самосопряженных расширений. Рассмотрим в пространстве  $\dot{I} = \ell_2(-\infty, \infty)$  оператор  $V$ , который определяется следующим образом:

$$D_V = \{x \in \dot{I} \mid x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, [0], x_1, x_2, \dots)\} \quad /14/$$

$$Vx = (\dots, x_{-3}, x_{-2}, [x_{-1}], 0, x_1, x_2, \dots) \quad /15/$$

Таким образом, для любых  $x$  и  $y$  из  $D_V$   $(Vx, Vy) = (x, y)$  то есть  $V$  — изометрический оператор. При этом, как легко убедиться,  $1 \in \sigma_p(V)$ . Это дает возможность рассмотреть оператор  $A$ :

$$A = i(V + I)(V - I)^{-1} \quad (D_A = D_{V-I}) \quad /16/$$

который является эрмитовым (как преобразование Кели изометрического оператора).

Покажем, что оператор  $A$  плотно определен и, таким образом, является симметрическим оператором. Действительно, пусть вектор  $h = (\dots, h_{-1}, [h_0], h_1, \dots)$  ортогонален линейалу  $D_A$ . Тогда  $((V - I)x, h) = 0$ , то есть

$$(Vx, h) = (x, h) \quad (\forall x \in D_V). \quad /17/$$

Рассмотрим вектор  $\ell_m = (\dots, \delta_{(-2)m}, \delta_{(-1)m}, [\delta_{0m}], \delta_{1m}, \delta_{2m}, \dots)$ , где  $m \in \mathbb{Z}$  и  $\delta_{km}$  — символ Кронекера. При любом целом  $m \neq 0$  вектор  $\ell_m \in D_V$ . Подставляя в /17/  $x = \ell_m / m \neq 0$ , получим, что  $\tilde{h}_{m+1} = h_m$  и, следовательно,

$$h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \dots = a, \quad h_1 = h_2 = h_3 = \dots = b$$

что возможно лишь при  $a = b \neq 0$ . Таким образом,  $h=0$ . Следовательно,  $A$  — симметрический оператор.

Пусть  $\mathfrak{R}_\lambda$  — дефектное подпространство оператора  $A$  и  $x_\lambda \in \mathfrak{R}_\lambda$ . Тогда

$$((A - \lambda I)x, x_\lambda) = 0 \quad (\forall x \in D_A). \quad /18/$$

А так как  $x = (V - I)f$ , где  $f \in D_V$ , и, с учетом равенства /16/  $A = iI + 2i(V - I)^{-1}$ , то

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)x &= (i - \lambda)x + 2i(V - I)^{-1}x = (i - \lambda)(V - I)f + 2if = \\ &= (i - \lambda)Vf + (\lambda + i)f. \end{aligned} \quad (19)$$

Но тогда, на основании /18/ и /19/,

$$(i - \lambda)(Vf, x_\lambda) + (\lambda + i)(f, x_\lambda) = 0 \quad /20/$$

В частности, при  $\lambda = i$  равенство /20/ переписывается в виде:

$$(f, x_i) = 0 \quad / \forall f \in D_V /. \text{ Следовательно,}$$

$$x_i = (\dots, 0, 0, [1], 0, 0, \dots) \quad /21/.$$

Таким образом,  $\mathfrak{R}_i = \langle x_i \rangle$ , где вектор  $x_i$  определяется равенством /21/.

Аналогично, при  $\lambda = -i$  /  $\forall f, x_{-i}$  /  $/ \forall f \in D_V /$ , и, следовательно,  $\mathfrak{R}_{-i} = \langle x_{-i} \rangle$ , где вектор  $x_{-i}$  определяется равенством

$$x_{-i} = (\dots, 0, 0, [0], 1, 0, 0, \dots) \quad /22/$$

Рассмотрим семейство унитарных операторов  $U_\theta$ , которые определяются следующим образом: если

$$x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], x_1, x_2, \dots) \in I \quad /23/$$

$$\text{то } U_{\theta x} = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, [x_0], \theta x_1, \theta x_2, \dots) \quad /24/$$

где  $\theta \in \mathbb{C}$ ,  $|\theta| = 1$  и  $\theta \neq 1$ . На основании равенств /14/-/16/ оператор  $U_\theta$  является  $U$ -инвариантным, причем

$$U_\theta x_i = x_i, \quad U_\theta x_{-i} = \theta x_{-i} \quad /25/$$

где  $x_i$  и  $x_{-i}$  — векторы из дефектных подпространств оператора  $A$ , определяемые равенствами /21/ и /22/.

Предположим, что существует  $U$ -инвариантное самосопряженное расширение  $S$  оператора  $A$ . Тогда, если  $x \in D_S$ , то

$$x = x_0 + x_i + \Phi x_i, \quad Sx = Ax_0 - i x_i + i \Phi x_i,$$

где  $\Phi$  — унитарный оператор, отображающий  $\mathfrak{R}_i$  в  $\mathfrak{R}_{-i}$ . При этом, так как дефектные подпространства  $\mathfrak{R}_i$  и  $\mathfrak{R}_{-i}$  одномерные, то

$$\Phi x_i = a x_{-i} \quad (|a| = 1) \quad /26/$$

Кроме того, оператор  $\Phi$ , в силу теоремы 5, также должен быть  $U$ -инвариантным. Однако, на основании равенств /25/ и /26/,

$$\Phi U_0 x_i = \Phi x_i, U_0 \Phi x_i = \theta \Phi x_i,$$

и, таким образом, равенство  $\Phi U_0 x_i = U_0 \Phi x_i$  возможно лишь при. Получили противоречие.

Итак, на основании предыдущего, не существует  $U$ -инвариантных самосопряженных расширений рассматриваемого  $U$ -инвариантного симметрического оператора  $A$ . В то же время регулярные  $U$ -инвариантные расширения оператора  $A$  существуют. Таким, например, является диссипативный оператор  $A_\lambda$ , определяемый на линейале  $D_{A_\lambda} = D_A + \mathfrak{R}_\lambda$  равенством

$$A_\lambda(x_0 + x_\lambda) = Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda (x_0 \in D_A, x_\lambda \in \mathfrak{R}_\lambda) \quad /27/$$

где  $\mathfrak{R}_\lambda$  — дефектное подпространство оператора  $A$ , а  $\lambda / \text{Im} \lambda < 0 /$  — фиксированная точка.

Отметим одну особенность оператора  $A_\lambda$  в рассматриваемом случае.

**Теорема 8.** Пусть симметрический оператор  $A$  определяется равенством /16/. Тогда точечный спектр оператора  $A_\lambda$ , который определяется равенством /27/, заполняет всю верхнюю полуплоскость.

о Пусть  $\lambda \neq i$ . Тогда, на основании равенства /20/

$$(\forall f, x_\lambda) = K_\lambda(f, x_\lambda) \quad /28/$$

где  $K_\lambda = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$ . При этом

$$(|K_\lambda| - 1) \text{Im} \lambda > 0 \quad (\text{Im} \lambda \neq 0) \quad /29/$$

Пусть  $x_\lambda = (\dots, \varphi_{-2}, \varphi_{-1}, [\varphi_0], \varphi_1, \varphi_2, \dots)$ . Рассуждая так же, как и при рассмотрении равенства /18/, убеждаемся, что при любом целом  $n \neq 0$   $\varphi_{n+1} = K_\lambda \varphi_n$  и, следовательно,

$$\varphi_n = (K_\lambda)^{n-1} \varphi_1, \varphi_{-n} = (-K_\lambda)^{-n} \varphi_0 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad /30/$$

Пусть  $\text{Im} \lambda > 0$ . Тогда, на основании /29/,  $|K_\lambda| > 1$ . Поэтому, с учетом /30/,  $|\varphi_n| \geq |\varphi_1| \quad / \forall n \in \mathbb{N} /$ , что возможно лишь при  $\varphi_1 = 0$ . Таким образом, при  $\text{Im} \lambda > 0$   $\varphi_n = 0 \quad / n \in \mathbb{N} /$ . Кроме того, так как  $(K_\lambda)^{-1} = K_{\bar{\lambda}}$ , то  $\varphi_{-n} = K_\lambda^n \varphi_0$ . Но тогда / при  $\text{Im} \lambda > 0$  и  $\varphi_0 = 1 /$

$$x_\lambda = (\dots, K_\lambda^2, K_\lambda, [1], 0, 0, \dots) \quad /31/$$

При этом, так как  $|K_\lambda| < 1$ , то

$$\|x_\lambda\|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} |K_\lambda^n|^2 = (1 - |K_\lambda|^2)^{-1}$$

В частности, при  $\lambda = i$   $K_\lambda = 0$  и вектор  $x_\lambda$  совпадает с вектором  $x_i$ , который определяется равенством /21/.

Аналогично, при  $\text{Im} \lambda < 0$   $|K_\lambda| < 1$  и, следовательно, на основании /30/,  $\varphi_{-n} = 0$  при любом целом  $n \geq 0$ . Но тогда, с учетом равенств /30/, при  $\varphi_1 = 1 /$  и  $\text{Im} \lambda < 0 /$

$$x_\lambda = (\dots, 0, 0, [0], 1, K_\lambda, K_\lambda^2, \dots) \quad /32/$$

При этом  $\|x_\lambda\|^2 = (1 - |K_\lambda|^2)^{-1}$  и при  $\lambda = -i$  вектор  $x_\lambda$  совпадает с вектором  $x_{-i}$  (см равенство /22/).

Пусть  $\lambda_0 / \text{Im } \lambda_0 > 0$  — фиксированное число. Тогда, как оператор  $A_\lambda$ , определяемый равенством /27/, диссипативный, то  $\mu = \bar{\lambda}_0 \in \sigma_p(A_\lambda)$ . Поэтому, с учетом формул фон Неймана, произвольный вектор  $x = x_0 + x_{\bar{\lambda}}$  из  $D_{A_\lambda}$  представим в виде  $x = y_0 + y_\mu + \Phi y_\mu$ , то есть

$$x = y_0 + y_{\bar{\lambda}_0} + \Phi y_{\bar{\lambda}_0} \left( y_0 \in D_A, y_{\bar{\lambda}_0} \in \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}_0} \right),$$

где  $y_{\bar{\lambda}_0} = ax_{\bar{\lambda}_0}$ ,  $\Phi y_{\bar{\lambda}_0} = bx_{\lambda_0}$  /  $a, b$  — некоторые комплексные числа /. Итак, окончательно,

$$x = y_0 + ax_{\bar{\lambda}_0} + bx_{\lambda_0}, \quad /33/$$

где  $y_0 \in D_A$ , а векторы  $x_{\lambda_0}$  и  $x_{\bar{\lambda}_0}$ , на основании равенств /31/, /32/ и  $K_{\bar{\lambda}} = K_\lambda^{-1}$ , представимы в виде

$$x_{\lambda_0} = (\dots, K_{\lambda_0}^2, K_{\bar{\lambda}_0}, [1], 0, 0 \dots) \quad /34/$$

$$x_{\bar{\lambda}_0} = (\dots, 0, 0, [0], 1, K_{\lambda_0}^{-1}, K_{\lambda_0}^{-2}, \dots) \quad /35/$$

С учетом равенств /27/, /33/ и формул фон Неймана находим, что

$$Ax_0 + \bar{\lambda}x_\lambda = Ay_0 + a\lambda_0 x_{\bar{\lambda}_0} + b\bar{\lambda}_0 x_{\lambda_0} \quad /36/$$

При этом

$$x_0 = (V - I)\phi, \quad y_0 = (V - I)\psi \quad (\{\phi, \psi\} \in D_V) \quad /37/$$

и, на основании /16/

$$Ax_0 = i(V + I)\phi, \quad Ay_0 = i(V + I)\psi,$$

Но тогда равенство /36/ переписывается так:

$$i(V + I)\phi + \bar{\lambda}x_\lambda = i(V + I)\psi + a\lambda_0 x_{\bar{\lambda}_0} + b\bar{\lambda}_0 x_{\lambda_0} \quad /38/$$

Умножая /33/ на  $i$  и вычитая из /38/, получим, с учетом равенств  $x = x_0 + x_{\bar{\lambda}}$  и /37/, что

$$2i\phi + (\bar{\lambda} - i)x_\lambda = 2i\psi + a(\bar{\lambda}_0 - i)x_{\bar{\lambda}_0} + b(\bar{\lambda}_0 - i)x_{\lambda_0} \quad /39/$$

Пусть  $P: H \rightarrow D_V^\perp$  - ортопроектор в  $H$ . Тогда  $P\phi = P\psi = 0$  и, с учетом равенств /32/, /35/ и /34/

$$Px_\lambda = Px_{\bar{\lambda}_0} = 0, \quad Px_{\lambda_0} = e_0 \quad /40/$$

где  $e_0 = (\dots, 0, 0, [1], 0, 0, \dots)$ . Применяя оператор  $P$  к обеим частям /39/ и учитывая равенства /40/, получим равенство  $b(\bar{\lambda}_0 - i)e_0 = 0$ , откуда следует, что  $b = 0$ . Таким образом, при любом  $\lambda_0$  из верхней полуплоскости  $\Phi y_{\bar{\lambda}_0} = bx_{\lambda_0} = 0$ .

Но тогда  $x = y_0 + y_{\bar{\lambda}_0}$ ,  $A_\lambda x = Ay_0 + a\lambda_0 x_{\bar{\lambda}_0}$ .

А так как  $y_{\bar{\lambda}_0} = ax_{\bar{\lambda}_0}$ , то при  $y_0 = 0$   $A_\lambda x_{\bar{\lambda}_0} = \lambda_0 x_{\bar{\lambda}_0}$ , то есть  $\lambda_0 \in \sigma_P(A_\lambda)$ . Таким образом, вся верхняя полуплоскость принадлежит точечному спектру оператора  $A_\lambda$ .  $\circ$

#### ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочубей А.Н. О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. - 1979. -Т. 13, N4. -С. 77-78.
2. Кужель А.В. Расширения эрмитовых операторов. -К.: Виша школа, 1989. -55с.
3. Филлипс Р.С. Расширение дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры // Математика / сб. переводов /. -1964. -Т. 8, N6. -С. 81-108.
4. Штраус А.В. О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР, Сер. матем. - 1968. -Т2. 32, N1. -С. 186-207.