КЛАССИФИКАЦИЯ ПАР ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ ОДНОГО ПРОСТРАНСТВА В ДРУГОЕ

А.И.Криворучко, кандидат физико-математических наук, доцент

Введение. Пусть $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$: $\mathbf{V} \to \mathbf{W}$ — гомоморфизмы конечномерных векторных пространств На основе теории элементарных делителей λ-матриц сначала в [1] (в регулярном случае, когда среди отображений $\mathbf{f} + \lambda\mathbf{g}$ имеются изоморфизмы), а затем в [2] (в сингулярном случае) построены базисы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$, в которых $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ (одновременно) описываются "наиболее простыми" матрицами, и дана линейная классификация пар ($\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$).

Вопросы, связанные с линейной классификацией четверок плоскостей, приводят к следующей задаче.

Пусть $\mathbf{f}$: $\mathbf{A} \to \mathbf{W}$ и $\mathbf{g}$: = $\mathbf{B} \to \mathbf{V}$ — гомоморфизмы конечномерных векторных пространств, удовлетворяющие одному из следующих двух условий:

1. $\mathbf{A} \subset \mathbf{V}$, $\mathbf{B} \subset \mathbf{W}$.

II. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — подпространства некоторого векторного пространства $\mathbf{L}$, $\mathbf{V} = \mathbf{W}$.

Построить базисы, в которых $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ описываются "возможно более простым" (каноническим) способом, определяемым классом линейной эквивалентности пары ($\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$).

В настоящей заметке решается эта задача. При этом получена линейная классификация пар гомоморфизмов, удовлетворяющих указанным выше условиям.

1^0. Пусть $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ удовлетворяют условиям I или II. В первом случае положим $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{g}(\mathbf{B})$, $\mathbf{Q} = \mathbf{B} + \mathbf{f}(\mathbf{A})$, а во втором — $\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) + \mathbf{g}(\mathbf{B})$.

Будем считать, что $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ содержит лишь общий нулевой вектор $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$.

Назовем ($\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$)-цепочкой (или просто цепочкой) цветной граф, являющийся простой цепью, вершины которой — попарно различные ненулевые векторы из $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$; при этом каждому ребру графа сопоставлено $\mathbf{f}$ или $\mathbf{g}$ (цвет ребра) так, что выполняются следующие условия:

а) у каждого подграфа $\bullet\!\!-\!\!\bullet$ одна из вершин является образом другой при гомоморфизме, сопоставленном ребру подграфа;

б) у каждого подграфа $\bullet\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\bullet$ одному из его ребер сопоставлено $\mathbf{f}$, а другому — $\mathbf{g}$.

Две цепочки назовем эквивалентными, если между ними существует изоморфизм цветных графов, сохраняющий принадлежиость вершин соответствущим пространствам $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

Пару базисов P ,Q для пространств $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ соответственно назовем канонической для ($\mathbf{f}$,$\mathbf{g}$), если $P \cup Q$ допускает разбиение (P_0, Q_0, $\mathbf{T}_1$, ..., $\mathbf{T}_k$) такое, что $P_0 \subset P$, $Q_0 \subset Q$ соответсвующие сужения $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ являются изоморфизмами между $\langle P_0 \rangle$ и $\langle Q_0 \rangle$ (и можно считать, что их соответствующая композиция φ : $\langle P_0 \rangle \to \langle P_0 \rangle$ имеет в базисе P_0, например, вторую естественную форму), а $\mathbf{T}_i$ является множеством всех вершин некоторой максимальной ($\hat{\mathbf{f}}$,$\mathbf{g}$)-цепочки ($\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{k}}$) (случаи $P_0 = Q_0 = \varnothing$, $\mathbf{k} = 0$ не исключаются).

Нетрудно проверить, что если такое разбиение существует, то оио единственно с точиостью до перестановки $\mathbf{T}_1$, $\cdots$, $\mathbf{T}_k$.

Будем иазывать его каноническим разбиением пары (P , Q).

Пусть (P',Q') — еще одна каноническая пара базисов для $(\mathbf{f},\mathbf{g})$, $(P_0', Q_0', \mathbf{T}_1', \cdots, \mathbf{T}_{k'}')$ — ее каноническое разбиение, $\varphi' : \langle P_0' \rangle \to \langle P_0' \rangle$ — соответствующий этой паре базисов автоморфизм. Назовем (P',Q') эквивалентиой (P, Q), если φ и φ' линейно эквивалентны, $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ и, с точностью до перестановки, $\mathbf{T}_i'$ эквивалентна $\mathbf{T}_i$ для всех $\mathbf{i} = \overline{1, \mathbf{k}}$.

<u>**Теорема.**</u> Пусть $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ удовлетворяет условиям I или II. Тогда $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ имеет каноническую пару базисов и любые две канонические пары базисов $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ эквивалентны.

2^0. Докажем теорему, предполагая, что $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ удовлетворяют условию I.

В этом случае среди всех пар подпространств $\mathbf{X} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{Y} \subset \mathbf{B}$, для которых $\mathbf{f}(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$, $\mathbf{g}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}$, существует наибольшая пара $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$; ее а также пару $\left(\mathbf{f}\big|_{\mathbf{A}_0}, \mathbf{g}\big|_{\mathbf{B}_0}\right)$ будем называть биективными частями $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ соответственно.

<u>**Лемма I.**</u> Пусть $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ — пара с нулевой биективной частью $\mathbf{C} = \mathbf{f}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}$, $\mathbf{h} = \mathbf{g}/_{\mathbf{C}}$. Тогда $(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ — пара с нулевой биективной частью и, если для нее существует каноническая пара базисов, то и для $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ существует каноническая пара базисов; при этом, если любые две канонические пары базисов $(\mathbf{f}, \mathbf{h})$ эквивалентны, то и любые две канонические пары базисов $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть (P',Q') — каноническая пара базисов $(\mathbf{f}, \mathbf{h})$. Тогда $P' \cup Q'$ распадается на максимальные цепочки следующих четырех типов:

$$\mathbf{T}_j^1\text{ - цепочка}\quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_{j1}^1 & & \cdots & & \\ & \mathbf{f}\searrow & \nearrow & \searrow & \\ & \mathbf{b}_{j1}^1 & & \mathbf{b}_{js_j^1}^1 & \notin \mathbf{B} \end{array},$$

где $\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_1}$;

$$\mathbf{T}_j^2\text{ - цепочка}\quad \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_{j1}^2 & & \cdots & & \mathbf{a}_{js_j^2}^2 & \notin \ker \mathbf{f} \\ & \mathbf{f}\searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ & \mathbf{b}_{j1}^2 & & \cdots & & \end{array},$$

где $(\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_2})$;

$$\mathbf{T}_j^3\text{ - цепочка}\quad \begin{array}{cccccc} \mathbf{a}_{j1}^3 & & \cdots & & \mathbf{a}_{js_j^3}^3 & \notin \mathbf{A} \\ & \mathbf{f}\searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\ & \mathbf{b}_{j1}^3 & & \cdots & & \end{array},$$

где $\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_3}$;

$$\mathbf{T}_j^4\text{ - цепочка}\quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_{j1}^4 & & \cdots & & \\ & \mathbf{f}\searrow & \nearrow & \searrow & \\ & \mathbf{b}_{j1}^4 & & \mathbf{b}_{js_j^4}^4 & \notin \ker \mathbf{g} \end{array},$$

где $\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_4}$.

Положим $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cap \mathbf{g}(\mathbf{B})$. Будем считать, что $\mathbf{a}^i_{j1} \in \mathbf{D}$ для всех $\mathbf{j} \leq \mathbf{m}_i$ и $\mathbf{a}^i_{j1} \in \mathbf{D}$ для всех $\mathbf{j} > \mathbf{m}_i$, где $0 \leq \mathbf{m}_i \leq \mathbf{l}_i$.

Пусть Q'' состоит из всех $\mathbf{b}^i_{jk} \in \mathbf{C} \setminus \ker \mathbf{h}$, $\mathbf{C}' = \langle Q'' \rangle$. Тогда $\mathbf{h} / \mathbf{c}'$ — мономорфизм, $\mathbf{C} = \ker \mathbf{h} \oplus \mathbf{C}'$, $\mathbf{B} = \ker \mathbf{g} \oplus \mathbf{B}'$ для некоторого $\mathbf{B}' \supset \mathbf{C}'$. Пусть $\mathbf{g}' = \mathbf{g} / \mathbf{B}'$. Тогда $\mathbf{g} : \mathbf{B}' \to \mathbf{g}(\mathbf{B})$ - изоморфизм, $\mathbf{D} \subset \mathbf{g}(\mathbf{B})$ и поэтому для всех $\mathbf{i} = \overline{1,4}$ и $\mathbf{j} > \mathbf{m}_i$ найдется $\mathbf{b}^i_{j0} \in \mathbf{B}'$, для которого $\mathbf{g}\left(\mathbf{b}^i_{j0}\right) = \mathbf{a}^i_{j1}$.

Векторы $\mathbf{b}^i_{jk} \in \mathbf{B}'$ линейно независимы и их можно дополнить векторами $\mathbf{b}^5_{j1} \in \mathbf{B}'\left(\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_5}\right)$ и $\mathbf{b}^6_{j1} \in \ker \mathbf{g}$ $\left(\mathbf{j} = \overline{1, \mathbf{l}_6}\right)$ до базиса в $\mathbf{B}$.

Теперь множество P всех $\mathbf{a}^i_{jk}$ является объединением множества $\widetilde{\mathbf{A}}$ всех тех из них, которые принадлежат $\mathbf{A}$ (и образуют базис $\mathbf{A}$), и $\mathbf{g}'(B')$, где B' — множество всех $\mathbf{b}^i_{jk} \in \mathbf{B}'$; B' — базис B', поэтому $\mathbf{g}'(B')$ — базис $\mathbf{g}(\mathbf{B})$; кроме того, $\mathbf{g}'(B') \cap \widetilde{A}$ — базис $\mathbf{A} \cap \mathbf{g}(\mathbf{B})$. Отсюда P базис $\mathbf{P}$. Аналогичным образом показывается, что $Q = \widetilde{B} \cup \mathbf{f}(A')$, где A' — множество всех $\mathbf{a}^i_{jk} \in \mathbf{A} \setminus \ker \mathbf{f}$, $\widetilde{B}$ — множество всех $\mathbf{b}^i_{jk} \in \mathbf{B}$, является базисом $\mathbf{Q}$. По построению, — (P, Q) каноническая пара базисов. При этом класс эквивалентности пары (P, Q) определяется классом эквивалентности пары (P', Q'), которая, в свою очередь, определяется парой (P, Q).

Лемма 2. Пусть $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$ — биективная часть пары $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $\widetilde{\mathbf{f}} : \mathbf{A}/\mathbf{A}_0 \to \mathbf{W}/\mathbf{B}_0$, $\widetilde{\mathbf{g}} : \mathbf{B}/\mathbf{B}_0 \to \mathbf{V}/\mathbf{A}_0$ — фактор отображения отображений $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$. Тогда $(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{g}})$ имеет нулевую биективную часть.

Доказательство. Допустим, что $\widetilde{\mathbf{f}}[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}]$, $\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{b}) = \mu(\mathbf{a})$. Тогда $\mathbf{f}(\mathbf{A}') \subset \mathbf{B}'$, $\mathbf{g}(\mathbf{B}') \subset \mathbf{A}'$, где $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0 + \langle \mathbf{a} \rangle$, $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_0 + \langle \mathbf{b} \rangle$. В силу максимальности биективной пары $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$, отсюда $[\mathbf{a}]$ и $[\mathbf{b}]$ — нулевые векторы в фактопространствах. Предположим, что существуют двумерные $\mathbf{C} \subset \mathbf{A}/\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{D} \subset \mathbf{B}/\mathbf{B}_0$ такие, что $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{C}) = \mathbf{D}$, $\widetilde{\mathbf{g}}(\mathbf{D}) = \mathbf{C}$. Пусть ненулевой $[\mathbf{a}] \in \mathbf{C}$. Тогда $\widetilde{\mathbf{f}}[\mathbf{a}] = [\mathbf{b}] \neq 0$, $\widetilde{\mathbf{g}}[\mathbf{b}] = [\mathbf{a}_1] \# [\mathbf{a}]$. Следовательно, $\mathbf{C} = \langle [\mathbf{a}], [\mathbf{a}_1] \rangle$, $\mathbf{D} = \langle [\mathbf{b}], [\mathbf{b}_1] \rangle$, где $[\mathbf{b}_1] = \widetilde{\mathbf{f}}[\mathbf{a}_1]$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} + \mathbf{b}_2$, $\mathbf{g}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{f}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3$, $\mathbf{g}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{l}\,\mathbf{a} + \mathbf{m}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle \subset \mathbf{A}_0$, $\langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \rangle \subset \mathbf{B}_0$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}_1 \rangle \cap \mathbf{A}_0 = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b}_1 \rangle \cap \mathbf{B}_0 = \langle 0 \rangle$. Положим $\mathbf{A}' = \langle \mathbf{A}_0, \mathbf{a}, \mathbf{a}_1 \rangle$, $\mathbf{B}' = \langle \mathbf{B}_0, \mathbf{b}, \mathbf{b}_1 \rangle$. Тогда $\mathbf{f}(\mathbf{A}') = \mathbf{B}'$, $\mathbf{g}(\mathbf{B}') \subset \mathbf{A}'$, что невозможно. Лемма доказана.

Пусть теперь $\mathbf{T}$ — $(\widetilde{\mathbf{f}}, \widetilde{\mathbf{g}})$-цепочка. Пользуясь тем, что $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ отображают классы эквивалентности векторов на классы эквивалентности, из каждого класса, являющегося вершиной $\mathbf{T}$, то можно выбрать представитель таким образом, чтобы выбранные представители образовывали $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$-цепочку, эквивалентную $\mathbf{T}$. Кроме того, полагая $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\mathbf{B}_0$, $\mathbf{A}_{2k+2} = \mathbf{A}_{2k+1}$, $\mathbf{B}_{2k+2} = \mathbf{B}_{2k+1} \cap \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{A}_{2k+1})$,

$A_{2k+3} = A_{2k+2} \cap \tilde{g}(B_{2k+1})$, $B_{2k+3} = B_{2k+2}$, по индукции строим убывающую последовательность (A_i, B_i), которая поэтому стабилизируется, а тогда $A_i = B_i = \langle 0 \rangle$ для некоторого i. Используя это, а также леммы 1 и 2, получаем доказательство теоремы в случае, когда f и g удовлетворяют условию 1.

3^0. Предположим теперь, что f и g удовлетворяют условию II. Определим пару $(f, g)_f$. Положим $A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = \langle 0 \rangle$, и если A_i, B_i, C_i, D_i уже определены, то $A_{i+1} = f^{-1}(C_i)$, $B_{i+1} = A_{i+1} \cap B$, $D_{i+1} = g(B_{i+1})$, $C_{i+1} = D_{i+1} \cap f(A)$.

Последовательности (A_i), (B_i), (C_i), (D_i) возрастают и поэтому стабилизируются, начиная с некоторого номера k.

Положим

$$(f, g)_f = \left(f\big|_{A_k}, g\big|_{B_k}\right). \quad (1)$$

Аналогичным образом определяются $(f, g)_g$.

Лемма 3. Если для $(f, g)_f$ существуют канонические пары базисов и все такие пары базисов эквивалентны друг другу, то и для (f, g) существуют канонические пары базисов и все они эквивалентны друг другу.

Доказательство. Пусть $(f, g)_f$ определена равенством (1). Заметим, что $f^{-1}(g(A_k)) = A_k$ и $f(A_i) \subset g(A_{i-1})$ для всех i; (2)

это позволяет определить фактор отображения

$$\tilde{f}: A/A_k \to W/g(A_k), \quad \tilde{g}: B/A_k \to W/g(A_k).$$

В силу уже доказанной части теоремы и мономорфности $\tilde{f}$ получаем, что $(\tilde{f}, \tilde{g})$ имеет канонические пары базисов, причем все они эквивалентны друг другу. Пусть $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ — одна из этих пар. Если T — $(\tilde{f}, \tilde{g})$-цепочка, входящая в каноническое разбиение $(\tilde{P}, \tilde{Q})$, то из каждого класса, являющегося вершиной T, можно выбрать представитель таким образом, чтобы все эти представители образовывали (f, g)-цепочку, эквивалентную T. При этом используется то, что $\tilde{f}$ -мономорфизм, а g отображает классы эквивалентности на классы эквивалентности.

Допустим теперь, что $[a_i] \in \tilde{P}_0$, $[u_i] \in \tilde{Q}_0$, $\tilde{f}[a_i] = [u_i]$ $(i = \overline{1, m})$, $\tilde{g}[a_j] = [u_{j+1}]$

$$(j = \overline{1, m-1}), \ \tilde{g}[a_m] = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i [u_i] \ (\gamma_1 \neq 0).$$

Тогда можно считать, что

$$\left.\begin{aligned} & f(a_i) = u_i \ (i = \overline{1, m}), \ g(a_j) = u_{j+1} + d_j \\ & (j = \overline{1, m-1}), \ g(a_m) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i + d_m \end{aligned}\right\}, \quad (3)$$

где $\mathbf{d}_i \in \mathbf{g}(\mathbf{A}_k)\ (\mathbf{i} = \overline{1, m})$. Отсюда $\mathbf{d}_i = \mathbf{g}(\mathbf{e}_i)$, $\mathbf{e}_i \in \mathbf{A}_k, \mathbf{f}(\mathbf{e}_i) \in \mathbf{g}(\mathbf{A}_{k-1})$. Поэтому для $\widetilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{e}_i \in [\mathbf{a}_i]$ и $\widetilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i + \mathbf{f}(\mathbf{e}_i) \in [\mathbf{u}_i]$ после переобозначения представителей, имеем (3), где $\mathbf{d}_i \in \mathbf{g}(\mathbf{A}_{k-1})$. Производя аналогичную замену $\mathbf{k}$ раз, получаем (3), где теперь все $\mathbf{d}_i = 0$.

Дополняя множество всех выбранных таким образом представителей векторами из $P \cup Q$, где (P, Q) - каноническая пара базисов для $(\mathbf{f}, \mathbf{g})_f$, получаем каноническую пару базисов для $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, класс эквивалентности которой определяется классами эквивалентности пар (P, Q) и $(\widetilde{P}, \widetilde{Q})$. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы положим $(\mathbf{f}_1, \mathbf{g}_1) = (\mathbf{f}, \mathbf{g})_f$, и если уже определена пара $(\mathbf{f}_{2m-1}, \mathbf{g}_{2m-1})$, то положим $(\mathbf{f}_{2m}, \mathbf{g}_{2m}) = (\mathbf{f}_{2m-1}, \mathbf{g}_{2m-1})_{g_{2m-1}}$, $(\mathbf{f}_{2m+1}, \mathbf{g}_{2m+1}) = (\mathbf{f}_{2m}, \mathbf{g}_{2m})_{f2m}$.

Пусть $\mathbf{X}_i$ — область определения $\mathbf{f}_i$, $\mathbf{Y}_i$ — область определения $\mathbf{g}_i$. Тогда последовательности $(\mathbf{X}_i)$ и $(\mathbf{Y}_i)$ убывают и поэтому стабилизируются на некотором номере $\mathbf{s}$, а тогда

$$(\mathbf{f}_s, \mathbf{g}_s)_{f_s} = (\mathbf{f}_s, \mathbf{g}_s)_{g_s} = (\mathbf{f}_s, \mathbf{g}_s). \quad (4)$$

В частности, $\mathbf{X}_s = \mathbf{Y}_s$ и можно сослаться на указанные во введении результаты, полученные в [1;2] (см. также [3, с. 312 - 324]).

Замечание. Условие (4) позволяет построить каноническую пару базисов для $(\mathbf{f}_s, \mathbf{g}_s)$ тем же способом, который применялся при доказательстве лемм 1 и 3, не используя теории элементарных делителей λ-матриц и результатов из [1,2]. При этом выясняется геометрический смысл минимальных индексов и других линейных инвариантов пары гомоморфизмов, определнных алгебраически в [1,2] для случая $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Работа финансируется из Государственного фонда фундаментальных исследований и ГКНТ Украины.

Список литературы

1. K. Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.- Monatsh. Akad. Wiss. Berlin (1867), s. 310-338.

2. L. Kronecker, Algebraische Reduction der Scharen bilinearer Formen.- Sitz.- Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, Berlin (1890), s. 763-776.

3.Ф.Р. Гентмахер, Теория матриц. Наука, Москва (1988), 552 с.