ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И ПСЕВДОТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

И.В.Орлов, кандидат физико-математических наук, доцент

Введение. Классическая формула конечных приращений для отображения отрезка в вещественное локально выпуклое топологическое пространство ([1]) дает глобальную замкнутую выпуклую оценку

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B \qquad (1)$$

при наличии локальной оценки $f'(t) \in g'(t) \cdot B, \ a < t < b$, где f и g непрерывны на $[a, b]$ и дифференцируемы кроме конечного или счетного "исключительного множества" d, g возрастает, B замкнуто и выпукло в E. В данной работе последовательно рассмотрены три направления обобщений формулы Лагранжа (1):

1) формула Лагранжа в ЛВП без предположения о счетности "исключительного множества" d ; (§1)

2) формула Лагранжа без предположения о локальной выпуклости ТВП E; (§2)

3) формула Лагранжа для псевдотопологических ЛВП (§3).

В заключительном разделе (§4) рассмотрен ряд приложений: формула Тейлора, формула Лагранжа-Стокса и др.

§1. Обобщенная формула Лагранжа в топологических ЛВП. ([2]-[4])

Всюду далее mes^* - внешняя мера Лебега в $\mathbf{R}$, mes - соответствующая мера, $(L)\int_A \varphi(t)dt$ - интеграл Лебега в $\mathbf{R}$. Приведем важную лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма 1.1. Если f - вещественная непрерывная на $\mathbf{R}$ функция, $D \subset \mathbf{R}$, $\mathrm{mes}^* D < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется дизъюнктное покрытие интервалами $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$ множества D, для которого:

$$\sum_n |f(\beta_n) - f(\alpha_n)| < \mathrm{mes}^* f(D) + \varepsilon .$$

С использованием этого результата и ряда других утверждений может быть получена оценка, переход от которой к общему случаю уже не составляет труда.

Теорема 1.2. Если f — вещественная, непрерывная на $[a, b]$ функция, дифференцируемая на $[a, b] \setminus d$, φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$, причем $f'(t) \le \varphi'(t)$ для $t \notin d$, то

$$f(b) - f(a) \le (L) \int_{[a,b]\setminus d} \varphi(t)dt + \mathrm{mes}^* f(d) .$$

Следствие 1.3. Если, в условиях теоремы 1.2, $\mathrm{mes}^* f(d) = \mathrm{mes} f(d) = 0$, то

$$f(b) - f(a) \le (L) \int_{[a,b]\setminus d} \varphi(t)dt . \qquad (2)$$

Применение оценки (2) и теоремы Хана-Банаха по известной схеме (сравн. [1]) приводит к общей формулировке.

Теорема 1.4. Пусть E — отделимое локально выпуклое пространство над R, B — его замкнутое выпуклое подмножество; $f\colon [a, b] \to E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$; $f(d)$ имеет скалярную меру нуль ([5]); φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$; $f'(t) \in \varphi(t) \cdot B$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда

$$f(b) - f(a) \in (L) \int_{[a,b]\setminus d} \varphi(t)dt \cdot B. \qquad (3)$$

Отметим, что классическая оценка (1) является весьма частным случаем формулы (3), соответствующим $\varphi(t) = g'(t)$, где $g(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на $[a, b] \setminus d$ функция, $g'(t) \ge 0$ и $\operatorname{mes} d = \operatorname{mes} g(d) = 0$, $f(d)$ — скалярной меры нуль. При этом "исключительное множество" d может быть также несчетным.

Следствие 1.5 ("теорема о среднем"). В условиях теоремы 1.4, относящихся к f ,

$$f(b) - f(a) \in \operatorname{mes}([a, b] \setminus d) \cdot \overline{\operatorname{conv}}\, f'([a, b] \setminus d). \qquad (4)$$

В случае $\operatorname{mes}(d) = 0$ оценка (4) принимает стандартный вид

$$(f(b) - f(a) / b - a) \in \overline{\operatorname{conv}}\, f'([a, b] \setminus d). \qquad (5)$$

(Здесь $\overline{\operatorname{conv}}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества).

Следствие 1.6 ("теорема о среднем для двух функций"). Если, при тех же условиях для f , функция g непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b] \setminus d$ и $g'(t) \ne 0$, то

$$f(b) - f(a) \in \operatorname{mes} g([a, b] \setminus d) \cdot \overline{\operatorname{conv}}\, \frac{f'}{g'}([a, b] \setminus d). \qquad (6)$$

В случае $\operatorname{mes} g(d) = 0$ оценка (6) принимает вид "формулы Коши"

$$(f(b) - f(a) / g(b) - g(a)) \in \overline{\operatorname{conv}}\, \frac{f'}{g'}([a, b] \setminus d). \qquad (7)$$

Оценки (6)-(7) существенно используются при выводе обобщенной формулы Тейлора в ЛВП (см. §4).

§2. Отделимая выпуклая оценка в формуле Лагранжа. ([6])

Как уже отмечалось, классическая формула (1) (вместе с ее обобщением (3)) дает замкнутую, а значит, нестрогую оценку Δf даже при наличии строгой оценки производной (скажем, $\| f'(t) \| < C$). Другим недостатком является обязательное условие локальной выпуклости E, сохраняющееся и в псевдотопологическом случае ([1],[7]). Мы введем ниже понятие отделимой выпуклости, позволяющее уточнить оценки (1)-(3) и при этом вывести теорему Лагранжа и основанную на ней технику анализа за рамки класса локально выпуклых пространств.

Пусть E — произвольное вещественное ТВП, $A \subset E$, $A \neq \varnothing$. Назовем ***отделимой выпуклой оболочкой*** $\operatorname{con\hat{v}} A$ множества A в E пересечение всех открытых выпуклых подмножеств E, содержащих A. Отметим некоторые свойства $\operatorname{con\hat{v}} A$.

1. Понятие $\operatorname{con\hat{v}} A$ всегда определено, но реально полезно, если $E_R^* \neq \{0\}$ (иначе $\operatorname{con\hat{v}} A = E$).

2. Если $\operatorname{con\hat{v}} A \neq E$, то $\operatorname{con\hat{v}} A$ есть пересечение всех открытых полупространств, содержащих A.

3. Если A связно, то $\operatorname{con\hat{v}} A$ функционально отделимо:

$$\operatorname{con\hat{v}} A = \left\{ x \in E \,\middle|\, \forall x^* \in E^* : \langle x^*, x \rangle \in \langle x^*, A \rangle \right\} \tag{8}$$

4. Назовем A ***отделимо выпуклым***, если $\operatorname{con\hat{v}} A = A$. В $\mathbf{R}$ все выпуклые множества отделимо выпуклы, в $\mathbf{R}^2$ уже нет.

5. Любое открытое выпуклое множество в ТВП E отделимо выпукло. Любое замкнутое выпуклое подмножество ЛВП E отделимо выпукло.

6. Если любая прямая в ТВП E дополняема (в частности, если E — ЛВП), то точки в E отделимо выпуклы.

Таким образом, класс отделимо выпуклых множеств достаточно широк и включает в себя, в большинстве случаев, как все открытые, так и все замкнутые выпуклые множества.

С помощью свойства функциональной отделимости (8) оценку (3) теоремы 1.4 нетрудно распространить на случай отделимо выпуклой оценки производной.

Теорема 2.1. Пусть E — отделимое топологическое векторное пространство над $\mathbf{R}$; $\hat{B}$ — отделимо выпуклое подмножество E; $f: [a, b] \to E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$, $f(d)$ — скалярной меры нуль; φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$, $f'(t) \in \varphi(t) \cdot \hat{B}$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда

$$f(b) - f(a) \in (L) \int_{[a,b]\setminus d} \varphi(t) \cdot \hat{B}. \tag{9}$$

Отметим, что рассматривая, как и в §1, частный случай $\varphi(t) = g'(t)$, где $g(t)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на $[a, b] \setminus d$, $\operatorname{mes} d = \operatorname{mes} g(d) = 0$; $f(d)$ — скалярной меры нуль, мы получаем переход к отделимой выпуклой оценке в классической формуле (1): из локальной оценки $f'(t) \in g'(t) \cdot \hat{B}$, где $\hat{B}$ — отделимо выпуклое подмножество ТВП E, вытекает глобальная оценка

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in [\mathbf{g}(\mathbf{b}) - \mathbf{g}(\mathbf{a})] \cdot \hat{\mathbf{B}}. \tag{10}$$

Следствие 2.2 ("теорема о среднем"). В условиях теоремы 2.1, относящихся к $\mathbf{f}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) \in \mathbf{mes}([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \mathbf{d}) \cdot \mathbf{con\hat{v}}\, \mathbf{f}'([\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \mathbf{d}). \tag{11}$$

В случае $\mathbf{mes}(\mathbf{d}) = 0$ оценка (11) принимает вид

$$\left(\mathbf{f}(\mathbf{b}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) \setminus \mathbf{b} - \mathbf{a}\right) \in \mathbf{con\hat{v}}\, \mathbf{f}'\left(\left[\mathbf{a}, \mathbf{b}\right] \setminus \mathbf{d}\right). \tag{12}$$

§3. Формула Лагранжа в псевдотопологических пространствах. ([8])}

Псевдотопологии были введены в связи с невозможностью задать топологию в $\mathbf{L}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ для ненормируемого $\mathbf{E}$, в которой вычисление $(\mathbf{L}, \mathbf{x}) \mapsto \mathbf{Lx}$ непрерывно ([9]), и нашли широкое применение в небанаховом дифференциальном исчислении ([10],[11]). Однако, теорема о среднем рассматривалась, как правило, при наличии в $\mathbf{E}$ локально выпуклой топологии, либо в ассоциированной локально выпуклой топологии. Мы вводим понятие однородной дифференцируемости на множестве (совпадающей с обычной в топологическом случае), что позволяет получить формулу Лагранжа в псевдотопологических ЛВП.

Псевдотопологическое векторное пространство $\mathbf{E}$ (ПВП) назовем ***локально выпуклым*** (ПЛВП), если каждый фильтр $\Phi \downarrow \mathbf{E}$ мажорируется фильтром $\Phi^{C} \downarrow \mathbf{E}$ с базисом из выпуклых множеств.

Отображение $\mathbf{f}\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ ($\mathbf{D} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{E}$ — ПВП), дифференцируемое на $\mathbf{D}$, ***однородно дифференцируемо на*** $\mathbf{D}$, если

$$\left[\sup_{t \in D}\left(\frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta \mathbf{t}}(\mathbf{t}) - \mathbf{f}'(\mathbf{t})\right)(\mathbf{V})\right] \downarrow \mathbf{E};\ \left(\mathbf{V} \downarrow \mathbf{R}\right).$$

Заметим, что в ТВП $\mathbf{E}$ любое дифференцируемое отображение $\mathbf{f}\colon \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ однородно дифференцируемо. В псевдотопологическом случае возможна как однородная, так и неоднородная дифференцируемость. Приведем сначала класс примеров однородной дифференцируемости.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$ в ПВП $\mathbf{E}$ назовем ***однородно сходящимся***, если

$$\left(\left(\sup_{n \geq 1}|\lambda_n|\right) \to 0\right) \Rightarrow \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{x}_n\right) \to 0\right).$$

Последовательность $\mathbf{f}_n\colon [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ назовем ***равностепенно дифференцируемой*** в точке $\mathbf{t} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, если

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sup_{n \ge 1} \left\| \frac{\Delta f_n}{\Delta t}(t) - f_n'(t) \right\| = 0.$$

Теорема 3.1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ однородно сходится в ПВП E, а последовательность $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на $[a, b]$ и равностепенно дифференцируема в каждой точке $t \in [a, b]$, то функция

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \cdot x_n$$

однородно дифференцируема на $[a, b]$.

Приведем теперь пример отображения, однородно дифференцируемого лишь локально.

Назовем ПВП E ***счетно-псевдонормированным***, если $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \ldots$; все E_n — нормированные пространства и $\|x\|_n \le \|x\|_{n+1}$ при $x \in E_n$. Сходимость в E определяется фильтрами

$$\Phi_n = \left[\{B_n(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}\right], B_n(\varepsilon) = \left\{x \in E_n \|x\|_n < \varepsilon\right\}.$$

Конкретным примером счетно-псевдонормированного пространства служит любое пространство $E = X^*$, сопряженное к счетно-нормированному; здесь

$$\|x^*\|_n = \inf\left\{C \left|\langle x^*, x\rangle\right| \le C\|x\|_n, x \in X\right\}, n \ge n(x^*).$$

Выберем в счетно-псевдонормированном пространстве E последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \notin E_{k_n}, k_n \to \infty$, и произвольное счетное разбиение $t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \cdots ÚT$ отрезка $[t_0, T)$. Положим при $t_{n-1} \le t \le t_n$:

$$f(t) = t^2 - 2t\left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k \Delta x_{k+1}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} t_k^2 \Delta x_{k+1}\right); n = 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно проверить, что отображение f однородно дифференцируемо на каждом отрезке $[t_0, t_n]$, но не является однородно дифференцируемым на $[t_0, T)$.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 3.2. Пусть E — ПЛВП, отображение $f: [a, b] \to E$ непрерывно на $[a, b]$ и локально однородно дифференцируемо на (a, b), причем $f'(t) \in g'(t) \cdot B$, где g непрерывна и возрастает на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), B замкнуто и выпукло в E. Тогда

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B.$$

Следствие 3.3. Результат теоремы 3.2 остается в силе, если f локально однородно дифференцируемо на $[a, b] \setminus \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$.

Заметим, что схема доказательства теоремы 3.2 позволяет в некоторых случаях не требовать монотонности g; эти результаты являются новыми и в топологическом случае.

Следствие 3.4. Результат теоремы 3.2 остается в силе при произвольном знаке $g'(t)$, если B — замкнутое аффинное подпространство E.

Следствие 3.5. Если, в условиях теоремы 3.2, B абсолютно выпукло, а $g'(t)$ (произвольного знака) абсолютно R-интегрируема, то

$$f(b) - f(a) \in \int_a^b |g'(t)|\, dt \cdot B.$$

Теперь рассмотрим вопрос о переносе отделимой выпуклой оценки (9)-(10) на псевдотопологический случай. Заметим, что в этом случае приведенные в §2 три варианта определения отделимо выпуклой оболочки уже не равносильны. Для наших целей нужно именно свойство функциональной отделимости (8).

Назовем выпуклое множество $\hat{B}$ в ПВП E ***отделимо выпуклым***, если

$$\left(x \in \hat{B}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x^* \in E_R^*: \langle x^*, x\rangle \in \langle x^*, B\rangle\right). \tag{13}$$

Теорема 3.6. Пусть E — отделимое ПВП над R; $\hat{B}$ — отделимо выпуклое подмножество E; $f: [a, b] \to E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$ (не обязательно однородно); $f(d)$ — скалярной меры нуль; φ неотрицательна и суммируема на $[a, b] \setminus d$; $f'(t) \in \varphi(t) \cdot \hat{B}$ при $t \in [a, b] \setminus d$. Тогда выполняется оценка (9).

Отметим, что оценки (11)-(12) также переносятся на этот случай.

§4. Некоторые приложения. ([2]-[4],[12])

1. Формула Тейлора. Рассмотрим сначала случай ЛВП E. Пусть $f: [a, b] \to E$ непрерывно на $[a, b]$ и дифференцируемо на $[a, b] \setminus d$; $t \in (a, b) \setminus d$. Для достаточно малых Δt обозначим $\Delta t_d := \text{mes}([t, t + \Delta t] \setminus d)$. Если f n раз дифференцируема в точке t, то введем обобщенный многочлен Тейлора $P_n^d(t, \Delta t)$ и остаточный член обобщенной формулы Тейлора $R_n^d(t, \Delta t)$:

$$P_n^d(t, \Delta t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta t_d^k}{k!} f^{(k)}(a); \quad R_n^d(t, \Delta t) = f(t + \Delta t) - P_n^d(t, \Delta t).$$

На базе формул (4)-(7) можно получить следующие оценки остаточного члена обобщенной формулы Тейлора.

Теорема 4.1 (форма Лагранжа). Если $f \in C^n[a, b]$, $f^{(n)}$ дифференцируема на $[a, b] \setminus d$, множества $f^{(k)}(d)$, $k = \overline{0, n}$, скалярной меры нуль, то

$$R_n^d(t, \Delta t) \in \frac{\Delta t_d^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\text{conv}}\, f^{(n+1)}([t, t + \Delta t] \setminus d) \tag{14}$$

Теорема 4.2 (форма Пеано). Если $f \in C^n(t)$, множества $f^{(k)}(d)$, $k = \overline{0, n-1}$, скалярной меры нуль, то

$$R_n^d(t, t + \Delta t) = o(\Delta t_d^n) \text{ при } \Delta t \to 0. \tag{15}$$

Теорема 4.3 (скалярная интегральная форма). Если $f^{(k)}$, $(k = \overline{0, n})$ скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$, множества $f^{(k)}(d)$, $(k = \overline{0, n-1})$ — скалярной меры нуль, то для всякого $x^* \in E^*$:

$$\langle x^*, R_n^d(a, b - a)\rangle = \frac{1}{n!}(L) \int_{[a, b]\setminus d} \langle x^*, f^{(n)}(t)\rangle' \cdot (b - t)_d^n dt \tag{16}$$

Оценки (14)-(16) являются новыми и в скалярном случае; они совпадают с классическими оценками при $\text{mes}(d) = 0$. Отметим также, что при отказе в т.4.2 от непрерывности $f^{(n)}$ в точке t равенство (15) может не выполняться уже при $n = 1$.

Перейдем к случаю псевдотопологического ЛВП E. Опираясь на т.3.2, для однородно дифференцируемых отображений можно получить аналоги оценок (14)-(16).

Теорема 4.4. Если f n раз непрерывно однородно дифференцируемо на $[a, b]$, $f^{(n)}$ однородно дифференцируемо на $[a, b]$, то

$$R_n(t, \Delta t) = f(t, t + \Delta t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta t^k}{k!} f^{(k)}(a) \in \frac{\Delta t^{n+1}}{(n+1)!} \overline{\text{conv}}\, f^{(n+1)}([t, t + \Delta t]).$$

Теорема 4.5. Если f n раз однородно дифференцируемо в точке t, то

$$R_n(t, \Delta t) = o(\Delta t^n) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Теорема 4.6. Если $f^{(k)}\left(k = \overline{0, n}\right)$ ($f^{(k)}$ — однородные производные) скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$, то для всякого $x^* \in E^*$:

$$\left\langle x^*, R_n(a, b - a)\right\rangle = \frac{1}{n!}(L)\int_a^b \left\langle x^*, f^{(n)}(t)\right\rangle' \cdot (b - t)^n dt.$$

Наконец, рассмотрим случай отделимых выпуклых оценок в произвольном ПВП E. Использование оценок (11)-(12) приводит к аналогам теорем 4.1 и 4.3.

Теорема 4.7. Если f $n + 1$ раз дифференцируемо в окрестности $o(t)$ точки t, множества

$f^{(k)}(d)\left(k = \overline{0, n}\right)$ — скалярной меры нуль, то

$$R_n^d(t, \Delta t) \in \frac{\Delta t_d^{n+1}}{(n + 1)!} \operatorname{con\hat{v}} f^{(n+1)}\left([t, t + \Delta t] \setminus d\right).$$

Теорема 4.8. Если $f^{(k)}\left(k = \overline{0, n}\right)$ скалярно абсолютно непрерывны на $[a, b]$ ($f^{(k)}$ — обычные производные), $f^{(k)}(d)$, $\left(k = \overline{0, n - 1}\right)$ — скалярной меры нуль, то выполняется равенство (16).

Заметим, что вывод асимптотической формы (15) остаточного члена существенно использует замкнутую оценку в теореме о среднем и поэтому не переносится на данную ситуацию.

2. Обобщенные степеные ряды. Отметим некоторые свойства функций $(\Delta t_d)^k$ $(k \in \mathbb{N})$:

1) $(\Delta t_d)^k$ возрастает и удовлетворяет условию Липшица с константой $k \cdot \left(\operatorname{mes}\left([t, t + \Delta t] \setminus d\right)\right)^{k-1}$;

2) $\varphi(d)$ имеет меру нуль при $\varphi(\Delta t) = (\Delta t_d)^k$;

3) $\varphi'(\Delta t) = k \cdot \Delta t_d^{\,k-1}$ в точках разрежения d, $\varphi'(\Delta t) = 0$ в точках t плотности d.

Для произвольного набора коэффициентов $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ из ЛВП E определим обобщенные многочлены "с дефектом d":

$$P_n^d(\Delta t) = \sum_{k=0}^{n} (\Delta t_d)^k \cdot C_k; \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Теорема 4.9. Если t — точка разрежения d, то

$$C_k = \frac{1}{k!}\left(P_n^d\right)_{ap}^{(k)}(0);\ \left(k = \overline{0, n}\right). \tag{17}$$

(Здесь $F_{ap}^{(k)}$ — аппроксимативная производная k-го порядка). Аналогичным образом определим теперь обобщенные степенные ряды "с дефектом d":

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(t - t_0\right)_d^n \cdot C_n. \tag{18}$$

Не обсуждая здесь весьма интересный вопрос об области сходимости рядов (18), мы лишь сформулируем аналог формул (17).

Теорема 4.10. Если E — полное отделимое ЛВП, и все ряды вида

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\left(t - t_0\right)_d^{n-k} \cdot C_n$$

равномерно сходятся в некоторой окрестности t_0, то

$$C_n = \frac{1}{n!}\left(F^d\right)_{ap}^{(n)}\left(t_0\right);\ \ (n = 0, 1, 2\ldots)$$

где F^d — сумма ряда (18).

Заметим, что с помощью обобщенных рядов Тейлора

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(t - t_0\right)_d^n}{n!}F_{ap}^{(n)}\left(t_0\right)$$

можно "склеивать" аналитические функции с константами. Пусть, например,

$$f(t) = e^{-1/t^2} \text{ при } -1 \le t < 0,\ f(t) = 0 \text{ при } t \ge 0.$$

При $d = [0, +\infty)$ имеем:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(t+1)_d^n.$$

3. Формула Лагранжа-Стокса. Пусть w-дифференциальная k-форма, заданная на кусочно-гладкой компактной поверхности $S \in R^n$ порядка k, с коэффициентами из ЛВП E:

$$w = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} W_{i_1 \ldots i_k}(\overline{x})\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k};$$

соответственно

$$\Phi = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(\overline{x})\, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k};$$

- $\mathbf{k}$ -форма на $\mathbf{S}$ с вещественными коэффициентами; $\mathbf{B}$ — замкнутое выпуклое множество в $\mathbf{E}$. Если для каждого набора $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k)$:

$$W_{i_1 \ldots i_k}(\overline{x}) \in \varphi_{i_1 \ldots i_k}(\overline{x}) \cdot \mathbf{B},$$

то мы будем писать: $w(\overline{x}) \in \Phi(\overline{x}) \cdot \mathbf{B}$. Далее, будем говорить, что $w(d)$ имеет скалярную меру нуль $(d \subset S)$, если для каждого набора $(\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_k)$ множество $W_{i_1 \ldots i_k}(d)$ - скалярной меры нуль.

Теорема 4.11 ("формула Лагранжа-Стокса"). Если w имеет скалярно суммируемые частные производные на $S \setminus d$, $w(d)$ - скалярной меры нуль, $dw(\overline{x}) \in \Phi(\overline{x}) \cdot \mathbf{B}$ при $\overline{x} \in S \setminus d$, Φ, имеет неотрицательные суммируемые коэффициенты на $S \setminus d$, то для любого $x^* \in E^*$:

$$\oint_{\partial S} \langle x^*, w \rangle \in \int_{S \setminus d} \Phi \cdot x^*(B). \tag{19}$$

Заметим, что оценка (3) является частным случаем оценки (19) при $S = [a, b]$.

Следствие 4.12 ("формула Стокса с дефектом d "). Если w — вещественная k - форма на S, имеющая суммируемые частные производные на $S \setminus d$, $w(d)$ - меры нуль, то

$$\oint_{\partial S} w = \oint_{S \setminus d} dw.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О.Г.Смолянов. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения.- М: изд-во МГУ, 1979.

2. И.В.Орлов. Обобщенная формула конечных приращений и ее приложения // Сб. "XI Всес. школа по теории операторов в функциональных пространствах". - Тезисы докладов. - Часть II.- Челябинск, 1986.

3. И.В.Орлов. Теорема Лагранжа и ее обобщение в современной математике // Математика сегодня.- К: Вища школа, 1987.- С.169--188.

4. И.В.Орлов. Обобщенная формула конечных приращений и обобщенная формула Тейлора в локально выпуклом пространстве // Депонирована в УкрНИИНТИ 24.06.88., N 1626-Ук88. - 31 с.

5. Н.Бурбаки. Интегрирование (Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления).- М: Наука, 1970.

6. I.V.Orlov. Separable convex estimation in the Mean value theorem // Spectral and evolutional problems.- Vol. 3.- Simferopol, 1993.- P.103--104.

7. А.Фрелихер, В.Бухер. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы.- М: Мир, 1970.

8. I.V.Orlov. Mean value theorem for the homogeneously differentiable mappings// Spectral and evolutional problems.- Vol. 4. - Simferopol, 1995.- 5 pages (toappear)

9. H.R.Fisher. Limesaume // Math. Ann.- Vol.137, 1959.- P.269-303.

10. В.И.Авербух, О.Г.Смолянов. Дифференцирование и псевдотопология // Вестник Моск.ун-та.- Серия мат.,мех., 1972.- N 1.- С.3-8.

11. И.В.Орлов. Теорема об обратной функции в псевдотопологических линейных пространствах // Депонирована в УкрНИИНТИ 15.06.89, N1716-Ук89. - 53 с.

12. И.В.Орлов. Формула Лагранжа-Стокса // Сб. "XII Всес. школа по теории операторов в функциональных пространствах".- Тезисы докладов.- Часть II.-Тамбов, 1987.