Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
Серия «Экономика». Том 17 (56). 2004 г. № 1. С. 98-103

УДК:330.131.7

А.В. Сигал

ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ЗАДАЧЕ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель настоящей работы – обоснование возможности приведения матричной игры к задаче квадратичного программирования, решение которой при определённых условиях позволит найти решение исходной парной матричной игры с нулевой суммой. Согласно традиционному подходу [1-3] любая парная матричная игра с нулевой суммой, не имеющая седловой точки, может быть решена приведением к симметричной паре взаимно-двойственных задач линейного программирования. Однако, в работах [4-6] был обоснован метод решения задачи минимизации дисперсии портфеля ценных бумаг, являющейся по сути задачей квадратичного программирования, при помощи решения соответствующей парной матричной игры с нулевой суммой, а в работе [7] приведено условие, при выполнении которого возможен теоретико-игровой метод решения задачи квадратичного программирования с одним линейным ограничением-равенством и условиями неотрицательности всех переменных. Полученный результат опирается на такие классические результаты, как метод множителей Лагранжа [1,2] и теорема фон Неймана-Моргенштерна [3].

В современной экономической науке и практике необходим учет факторов неопределенности, конфликтности и порожденного ими риска. Во многих ситуациях принятия управленческих решений моделировать риск в экономике позволяет теоретико-игровой подход. Применение матричных игр требует новых методов их решения, что и обусловливает актуальность данного исследования.

Рассмотрим парную матричную игру с нулевой суммой, заданную симметричной платежной матрицей $\boldsymbol{C}$. Таким образом, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{n\times n} = (c_{ij})$, где $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^T$, то есть c_{ij} – заданные действительные числа равные выигрышу первого игрока, если он применил свою i-ю чистую стратегию, а второй игрок применил свою j-ю чистую стратегию, удовлетворяющие равенствам $c_{ij} = c_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Симметричная матрица $\boldsymbol{C}$ задает квадратичную форму

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x}^T,$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1 : x_2 : \ldots : x_n)$ – вектор-строка переменных, $\boldsymbol{x}^T$ вектор-столбец транспонированный по отношению к $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{C}$ – произведение вектор-строки $\boldsymbol{x}$ на матрицу C, $x \cdot C \cdot x^T$ – скалярное произведение вектор-строки $x \cdot C$ на вектор-столбец x^T.

Покажем, что при выполнении некоторых (не слишком жёстких) условий решение следующей задачи квадратичного программирования

$$z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j = x \cdot C \cdot x^T \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},$$

позволяет найти оптимальные стратегии игроков, заданные вектором $p^* = (p_1^*; p_2^*; \ldots; p_n^*)$ для первого и вектором $q^* = (q_1^*; q_2^*; \ldots; q_n^*)$ для второго, а также значение цены игры $v^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i^* q_j^* = p^* \cdot C \cdot q^{*T}$. Очевидно, функция Лагранжа для приведённой задачи квадратичного программирования с одним ограничением-равенством имеет вид

$$L = L(x;\lambda) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j + \lambda(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j),$$

где λ – множитель Лагранжа.

Если квадратичная форма z (матрица C) положительно определена, то условия стационарности функции Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} + \lambda \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(1 - \sum_{j=1}^{n} x_j) = 2\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j - \lambda = 0,\ i = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial z}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} \cdot (1 - \sum_{j=1}^{n} x_j) = 1 - \sum_{j=1}^{n} x_j = 0,$$

вместе с требованиями неотрицательности всех переменных

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n},$$

задают необходимые и достаточные условия оптимальности решения рассматриваемой задачи квадратичного программирования [1,2].

Обозначим стационарную точку функции Лагранжа $L = L(x;\lambda)$ через вектор $x^* = (x_1^*; x_2^*; \ldots; x_n^*)$. Сформулируем утверждение, устанавливающее связь между вектором x^* и значением множителя Лагранжа λ^*, с одной стороны, и оптимальными смешанными стратегиями p^*, q^* игроков и значением цены игры v^*, с другой стороны:

Теорема. Пусть симметрическая матрица $C = C_{n\times n} = (c_{ij})$ не имеет седлового элемента, а все компоненты стационарной точки функции Лагранжа $L = L(x;\lambda)$ положительны, то есть $x_j^* > 0$, $j = \overline{1,n}$. Тогда для оптимальных смешанных стратегий $p^* = (p_1^*; p_2^*; \ldots; p_n^*)$ первого, $q^* = (q_1^*; q_2^*; \ldots; q_n^*)$ второго игроков и цены игры $v^* = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} p_i^* q_j^* = p^* \cdot C\ q^{*T}$ парной матричной игры с нулевой суммой, заданной платёжной матрицей $C = C_{n\times n} = (c_{ij})$, справедливы следующие равенства: $p^* = q^* = x^*$, то есть $p_j^* = q_j^* = x_j^*$, $j = \overline{1,n}$, и $v^* = \frac{\lambda^*}{2}$.

<u>Доказательство</u>. Согласно условиям теоремы справедливы следующие соотношения

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i^* = \frac{\lambda^*}{2}, \quad j = \overline{1,n}, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^* = 1, \\ x_i^* > 0, \ i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j^* = \frac{\lambda^*}{2}, \quad i = \overline{1,n}, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j^* = 1, \\ x_j^* > 0, \ j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

В силу симметричности матрицы $C = C_{n\times n} = (c_{ij})$ эти системы абсолютно совпадают. Первая из этих систем позволяет утверждать, что оптимальная стратегия первого игрока вполне смешана, то есть $p_i^* > 0$, $i = \overline{1,n}$, а применение первым игроком своей оптимальной смешанной стратегии $p^* = x^*$ против любой чистой стратегии второго игрока приводит к ожидаемому выигрышу первого игрока равному по своей величине цене игры $v^* = \frac{\lambda^*}{2}$. Аналогично, вторая система позволяет утверждать, что оптимальная стратегия второго игрока вполне смешана.

то есть $q_j^* > 0$, $j = \overline{1,n}$, а применение вторым игроком своей оптимальной смешанной стратегии $\boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{x}^*$ против любой чистой стратегии первого игрока приводит к ожидаемому проигрышу второго игрока равному по своей величине цене игры $v^* = \frac{\lambda^*}{2}$.

Таким образом, соответствующая игра оказалась вполне смешанной [3], для которой оптимальные смешанные стратегии игроков определяются вектором $\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{q}^* = \boldsymbol{x}^*$, то есть $p_j^* = q_j^* = x_j^*$, $j = \overline{1,n}$, а цена игры равна $v^* = \boldsymbol{p}^* \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{q}^{*T} = \boldsymbol{x}^* \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{x}^{*T} = \frac{\lambda^*}{2}$, ч.т.д..

В случае положительной определённости квадратичной формы z (матрицы $\boldsymbol{C}$) решение вполне смешанной игры, заданной симметричной платёжной матрицей $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{n\times n} = (c_{ij})$, согласно приведённой теореме сводится к решению соответствующей задачи квадратичного программирования с одним линейным ограничением-равенством и условиями неотрицательности всех переменных.

Пример. Найти оптимальные стратегии игроков и цену игры «Угадайка». Правила данной игры следующие: два игрока одновременно называют или 1, или 2, или 3, при этом первый игрок выплачивает второму 3 условные денежные единицы (УДЕ), если числа совпали, или второй игрок выплачивает первому сумму равную разности большего и меньшего из названных чисел, если числа не совпали.

Решение. Обозначим c_{ij} – выигрыш первого игрока, если он назвал i, а второй игрок назвал j. Тогда по условию имеем

$$c_{ij} = \begin{cases} -3, & \text{если } i = j, \\ |i - j|, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

где $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,3}$, то есть

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{3\times 3} = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, справедливо равенство $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^T$, поэтому платёжная матрица рассматриваемой парной матричной игры с нулевой суммой является симметричной. Исследуем матрицу $\boldsymbol{C}$ на наличие седлового элемента:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max\{-3;-3;-3\} = -3,$$

$$\beta = \min_j \beta_j = \min\{2;1;2\} = 1.$$

Таким образом, $\alpha = -3 < 1 = \beta$, то есть платёжная матрица $\boldsymbol{C}$ игры «Угадайка» не имеет седлового элемента.

Симметричная матрица C задаёт квадратичную форму
$z = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Рассмотрим главные миноры матрицы C:

$$\Delta_1 = c_{11} = -3 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-3) - 1\cdot 1 = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det(C) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-3)\cdot(-3) + 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot(-3)\cdot 2 -$$

$$-1\cdot 1\cdot(-3) - (-3)\cdot 1\cdot 1 = -5 < 0.$$

Квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда все собственные значения её матрицы отрицательны, или, что равносильно согласно критерию Сильвестра, тогда и только тогда, когда главные миноры матрицы квадратичной формы нечётного порядка меньше нуля, а чётного порядка больше нуля [1]. Поэтому данная квадратичная форма z (матрица C) отрицательно определена.

Решим следующую задачу квадратичного программирования:

$z = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 \to \max$ (т.е. $f = -z \to \min$),

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$,

$x_j \geq 0$, $j = \overline{1,3}$.

Её функция Лагранжа имеет вид

$$L = L(x;\lambda) = -3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3).$$

Составим для этой функции условия стационарности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 4x_1 + 2x_2 - 6x_3 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Полученная система четырёх линейных алгебраических уравнений с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3, λ совместна и определена, при этом её единственным решением является вектором $(x^*;\lambda^*) = (x_1^*;x_2^*;x_3^*;\lambda^*)$, компоненты которого равны

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{4}{11} > 0, \\ x_2^* = \dfrac{3}{11} > 0, \\ x_3^* = \dfrac{4}{11} > 0, \\ \lambda^* = -\dfrac{2}{11}. \end{cases}$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков задаются вектором $p^* = q^* = x^* = (\frac{4}{11}; \frac{3}{11}; \frac{4}{11})$, при этом цена игры равна $v^* = \frac{\lambda^*}{2} = -\frac{1}{11}$.

Общий вывод

Вполне смешанная парная матричная игра с нулевой суммой, заданная симметричной платёжной матрицей, не имеющей седлового элемента, может быть приведена к задаче поиска стационарной точки функции Лагранжа для задачи квадратичного программирования с одним линейным ограничением-равенством и условиями неотрицательности всех переменных. При этом матрицей оптимизируемой квадратичной формы является платёжная матрица исходной игры, оптимальное решение соответствующей задачи квадратичного программирования задаёт оптимальные вполне смешанные стратегии игроков, которые совпадают, а значение цены игры равно половине значения множителя Лагранжа. Предлагаемый метод решения антагонистических игр позволяет расширить сферу применения теоретико-игрового моделирования экономического риска.

Список литературы

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория/ Пер. с англ. Под редакцией А.А. Конюса. – М.: Прогресс, 1975. – 606 с.
2. Романюк Т.П., Терещенко Т.А., Присенко Г.В., Городкова І.М. Математичне програмування: Навч. посібник. – К.: ІЗМН, 1996. -312 с.
3. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Высш. шк., 1998.- 304 с.
4. Сигал А.В. Основы современной теории портфеля ценных бумаг: Учеб. пособие. – Симферополь: КЭИ КНЭУ, 1998. – 60 с.
5. Сігал А.В. Задача мінімізації портфельного ризику: ігровий підхід// Моделювання та інформаційні системи в економіці. (Машинна обробка інформації): Межвідом. наук. зб.. Вип. 64. – К: КНЕУ, 2000 – С. 154-159.
6. Економічний ризик: ігрові моделі: Навч. Посібник/ В.В. Вітлінський, П.І. Верчено, А.В. Сігал, Я.С. Наконечний; За ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.: КНЕУ, 2002. – 446 с.
7. Сигал А.В. Теоретико-игровой метод условной минимизации квадратичной формы// Актуальные проблемы и перспективы развития экономики Украины (в контексте глобализации): Материалы Всеукраинской научно-практической конференции – Симферополь, 2004. – С. 39-40.

Поступило в редакцию 2 декабря 2004 г.