Курс «Теория игр»

О.В.Анашкин,
доцент, к.ф.-м.н., кафедра информационных систем в экономике

Тема 1. Основные понятия теории игр.

Каждый не раз принимал участие в играх, по крайней мере, в детстве, и на интуитивном уровне знаком с принципиальными особенностями любой игры: всякий игрок преследует собственную цель и при этом должен учитывать возможные действия других игроков. Теория игр является теорией математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, возникающих в конфликтных ситуациях, т.е., в условиях столкновения интересов сторон, каждая из которых стремится действовать в своих собственных целях и принимающему решение субъекту необходимо учитывать возможные действия остальных участников процесса. Разработка принципов оптимального поведения игроков и алгоритмов отыскания оптимальных стратегий и составляет содержание теории игр. Она сформировалась как самостоятельное научное направление в сороковых годах XX века в значительной мере из потребностей экономической теории. Основные понятия современной теории игр были введены Дж. фон Нейманом. В последние годы наблюдается рост интереса к методам теории игр в различных общественных науках, к которым относится и экономика.

Имеется по меньшей мере две причины возрастания значения теории игр для экономики. Во-первых, эта теория дает универсальный аппарат экономического анализа в самых различных областях; во-вторых, она структурирует процесс моделирования экономического поведения. Теория игр не просто расширяет горизонты экономического мышления, но предлагает инструменты моделирования экономических задач. Чтобы получить максимальную пользу, которую могут дать формальные структуры теории для анализа конкретных экономических и общественных проблем, необходимо овладеть математическим аппаратом теории игр, поэтому основное внимание в курсе уделяется изучению математического языка теории игр.

Эффективность применения методов теории игр в реальной конфликтной ситуации зависит от умения исследователя построить подходящую математическую модель, которая и называется *игрой*. Варианты возможных действий игрока называют *стратегиями*. Описание игры содержит список игроков, множества их стратегий, а также способ определения выигрыша каждого игрока. Выборка стратегий игроков называется *ситуацией*, а выигрыш игрока есть функция, определенная на множестве ситуаций. Таким образом, игру формально можно задать системой множеств (или списков)

$$\Gamma = (I, \{X_i\}_{i=1}^n, \{H_i\}_{i=1}^n),$$

где $I = \{1,...,n\}$ — список игроков, X_i — множество стратегий i-го игрока, $H_i : (x_1,...,x_n) \to H_i(x_1,...,x_n)$ — числовая функция выигрыша i-го игрока, $i = 1,...,n$. Существуют разные классификации игр по тем или иным признакам: бескоалиционные и кооперативные, конечные и бесконечные, антагонистические и с ненулевой суммой, позиционные, дифференциальные игры. Примеры.

Тема 2. Антагонистическая игра в нормальной форме. Матричные игры.

Система $\Gamma = (X, Y, H)$, где X, Y — непустые множества, $H : X \times Y \to R^2$ — заданная функция, называется *антагонистической игрой в нормальной форме.* Элементы множеств X и Y являются стратегиями игрока 1 и 2 соответственно, H — функция выигрышей первого игрока, определенная на ситуациях $(x, y) \in X \times Y$. Конечная антагонистическая игра называется *матричной.* Матричная игра полностью определяется заданием матрицы A выигрышей первого игрока и обозначается Γ_A.

Пример 2.1. (*игра полковника Блотто*). Полковник Блотто (игрок 1) имеет m полков, а его противник (игрок 2) — n. Противник защищает две позиции. Позиция будет занята игроком 1, если наступающие полки будут в численном превосходстве. Выигрыш игрока 1 равен сумме выигрышей на обеих позициях, а выигрыш на каждой позиции определяется так: если у него полков больше, то выигрыш равен числу полков игрока 2 плюс 1, если меньше, то игрок 1 теряет все свои полки плюс 1. Если силы равны, то никто ничего не получит. Например, для $m = 4$, $n = 3$ игра задается (5×4)-матрицей с элементами: $a_{11} = 4$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 1$, $a_{14} = 0$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{22} = 3$, $a_{23} = 0$, $a_{24} = -1$, $a_{31} = -2$, $a_{32} = 2$, $a_{33} = 2$, $a_{34} = -2$, $a_{41} = -1$, $a_{42} = 0$, $a_{43} = 3$, $a_{44} = 1$, $a_{51} = 0$, $a_{52} = 1$, $a_{53} = 2$, $a_{54} = 4$.

Игрок 1(2) в матричной игре может обеспечить себе выигрыш (проигрыша) не менее *нижней цены* игры $\underline{v} = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij}$ (не более *верхней цены* игры $\overline{v} = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$) цены игры путем выбора *максиминной* i_0 (*минимаксной* j_0) стратегии. В данном выше примере $\underline{v} = 0$, $\overline{v} = 3$. Игрок 1 имеет две максиминных стратегии: $i_0 = 1$ (или 5). Игрок 2 также имеет две минимаксных стратегии: $j_0 = 2$ (или 3).

В любой антагонистической игре нижняя цена игры не больше верхней: $\underline{v} = \sup\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} H(x, y) \le \overline{v} = \inf\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} H(x, y)$. Ситуация (x_0, y_0) называется *ситуацией равновесия* или *седловой точкой,* если $H(x, y_0) \le H(x_0, y_0) \le H(x_0, y)$, $\forall x, y \in X \times Y$. Для того, чтобы в игре $\Gamma = (X, Y, H)$ существовала ситуация равновесия, необходимо и достаточно, чтобы существовали минимакс $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} H(x, y)$ и максимин $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} H(x, y)$ и выполнялось равенство $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X} H(x, y)$ = $\max\limits_{x \in X} \inf\limits_{y \in Y} H(x, y)$. Значит, если $\underline{v} = \overline{v}$, то в матричной игре имеется седловая точка. При наличии седловой точки игрокам невыгодно отклоняться от ситуации равновесия. Поэтому стратегии, входящие в ситуации равновесия, называются *оптимальными.*

В рассмотренном выше примере нет седловых точек. Оказывается, что в этом случае оптимального результата можно добиться при многократном повторении игры, когда игроки выбирают стратегии случайным образом. Элементы множества стратегий игрока далее будем называть *чистыми стратегиями.* Пусть каждый из игроков не указывает точно выбираемую стратегию, а лишь задает вероятностное распределение на множестве стратегий. Это вероятностное распределение называется *смешанной стратегией.* В матричной игре $\Gamma_A = (M, N, A)$, где $M = \{1,..,m\}$, $N = \{1,..,n\}$, $A = (a_{ij})$ — $(m \times n)$-матрица, смешанной стратегией игрока

1 (2) называется неотрицательный вектор $x = (x_1 ... x_n)$ $(y = (y_1 ... y_m))$, сумма координат которого равна 1. Обозначим X (Y) множество смешанных стратегий игрока 1 (2). Смешанная стратегия, у которой i-ая компонента равна 1, а остальные, естественно, равны нулю, отождествляется с i-ой чистой стратегией игрока и обозначается символом i. Выигрыш игрока 1 в ситуации $(x, y) \in X \times Y$ определим как математическое ожидание $H(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. Игра $\overline{\Gamma}_A = (X, Y, H)$ называется *смешанным расширением* игры Γ_A.

Основная теорема матричных игр утверждает, что любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях. Иными словами, смешанное расширение любой матричной игры имеет седловую точку (x^0, y^0), т.е. $H(x, y^0) \le H(x^0, y^0) \le H(x^0, y)$, $\forall x, y \in X \times Y$. Величина $v_A = H(x^0, y^0)$ называется *значением* или *ценой игры*.

Чистая стратегия $i \in M$ $(j \in N)$ игрока 1 (2) называется *активной*, если найдется оптимальная стратегия $x^0 = (x_1^0, ..., x_m^0)$ $(y^0 = (y_1^0, ..., y_n^0))$ этого игрока, для которой $x_i^0 > 0$ $(y_j^0 > 0)$. Весьма полезна следующая *теорема об активных стратегиях*. Пусть (x^0, y^0) — ситуация равновесия в игре $\overline{\Gamma}_A$ и v_A — значение игры, тогда, если $x_i^0 > 0$, то $H(i, y^0) = v_A$, и, если $y_j^0 > 0$, то $H(x^0, j) = v_A$. Обратно, если $H(i, y^0) < v_A$, то $x_i^0 = 0$, и, если $H(x^0, j) > v_A$, то $y_j^0 = 0$.

Можно доказать, что любая матричная $(m \times n)$-игра имеет оптимальное решение, в котором число активных стратегий каждой стороны не превосходит $\min\{m, n\}$.

Напомним, что в ситуации (i, y^0) игрок 1 применяет чистую стратегию i, а игрок 2 — смешанную стратегию y^0.

Отметим такие следующие важные свойства оптимальных стратегий и значения игры.

1. Ситуация (x^0, y^0) оптимальна (является равновесной), а $H(x^0, y^0)$ есть значение игры, тогда и только тогда, когда для всех $i \in M$ и $j \in N$ $H(i, y^0) \le H(x^0, y^0) \le H(x^0, j)$.
2. Ситуация (x^0, y^0) равновесна тогда и только тогда, когда
$$\max_{1 \le i \le m} H(i, y^0) = \min_{1 \le j \le n} H(x^0, j).$$
3. $\max_x \min_j H(x, j) = \min_y \max_i H(i, y) = v_A$.

Для решения матричной игры, в которой один из игроков имеет две стратегии, можно использовать *графоаналитический метод*.

Рассмотрим $(2 \times n)$-игру без седловых точек. Игрок 1 имеет 2 стратегии, а игрок 2 — n. Пусть игрок 1 выбрал смешанную стратегию $x = (\xi, 1 - \xi)$, $\xi \in (0, 1)$ а игрок 2 выбрал чистую стратегию j. Выигрыш игрока 1 в этой ситуации равен
$$H(x, j) = a_{1j}\xi + a_{2j}(1 - \xi) = L_j(\xi).$$

Обозначим $K(\xi)=\min\limits_j H(x,j)$ нижнюю огибающую семейства прямых $\{L_j(\xi)\}_{j=1}^n$. Точка $\xi^0\in(0,1)$, в которой $K(\xi)$ достигает максимума, и дает искомую оптимальную стратегию $x^0=(\xi^0,1-\xi^0)$ игрока 1 и значение игры $v_A=K(\xi^0)$. Точка ξ^0 лежит внутри интервала $(0,1)$, поэтому в точке $(\xi^0,K(\xi^0))$ плоскости пересекаются две или более прямых семейства $\{L_j(\xi)\}$.

Для вычисления оптимальной стратегии игрока 2 следует выбрать любую пару прямых, пересекающихся в точке $(\xi^0,K(\xi^0))$, нижняя огибающая которых также имеет максимум в точке ξ^0.

Пусть подходящими прямыми будут $L_s(\xi)$ и $L_k(\xi)$. Остается найти оптимальное решение игрока 2 в подыгре с (2×2)-матрицей, образованной столбцами матрицы A с номерами s и k. Для этого решаем систему уравнений

$$a_{1s}y_s^0+a_{1k}y_k^0=K(\xi^0),$$
$$a_{2s}y_s^0+a_{2k}y_k^0=K(\xi^0).$$

В качестве примера рассмотрим (2×3)-игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 4/3 & 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Все три прямые в этом примере пересекаются в точке $(1/4,1)$. Поэтому $\xi^0=1/4$, $v_A=1$, $x^0=(1/4,3/4)$. Подходящими прямыми для отыскания y^0 будут две пары: $L_1(\xi)$, $L_2(\xi)$ или $L_1(\xi)$, $L_3(\xi)$, но не $L_2(\xi)$, $L_3(\xi)$.

Игра, в которой игрок 2 имеет две стратегии, т.е. $(m\times2)$-игра, решается графоаналитическим методом аналогично.

Находя и исключая доминируемые стратегии, легко понизить размерность игры. Говорят, что стратегия x (y) игрока 1 (2) *доминирует* стратегию x' (y'), если для всех $j=1,\dots,n$ $H(x,j)\ge H(x',j)$ (для всех $i=1,\dots,m$ $H(i,y)\le H(i,y')$). Если $H(x,j)=H(x',j)$ для всех $j=1,\dots,n$ ($H(i,y)=H(i,y')$ для всех $i=1,\dots,m$), то стратегии x и x' (y и y') называются *эквивалентными*. В частности, чистая стратегия s игрока 1 (2) доминирует чистую стратегию k игрока 1 (2), если $a_{sj}\ge a_{kj}$ для $j=1,\dots,n$ ($a_{is}\le a_{ik}$ для $i=1,\dots,m$).

Строку или столбец, отвечающие доминируемой стратегии, можно исключить из матрицы, т.к. эта стратегия не может быть активной.

Тема 3. Матричные игры и линейное программирование

Задача отыскания оптимального решения матричной игры естественным образом сводится к паре взаимно двойственных задач линейного программирования. Рассмотрим игру Γ_A, где A — $(m\times n)$-матрица. Не ограничивая общности, можно считать значение игры v положительным. Применяя оптимальную стратегию x^0 против произвольной чистой стратегии j игрока 2, игрок 1 получит средний выигрыш $H(x^0,j)=a_{1j}x_1^0+\dots+a_{mj}x_m^0\ge v>0$, где $v-$ значение игры. Можно показать, что x^0 можно представить в виде $x^0 = v\xi^0$, где ξ^0 — решение следующей задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&\xi_1 + \ldots + \xi_m \to \min \\
&a_{11}\xi_1 + \ldots + a_{m1}\xi_m \geq 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{1n}\xi_1 + \ldots + a_{mn}\xi_m \geq 1, \\
&\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_m \geq 0.
\end{aligned}$$

Оптимальная стратегия y^0 игрока 2 может быть найдена в виде $y^0 = v\eta^0$, где η^0 — решение двойственной задачи линейного программирования

$$\begin{aligned}
&\eta_1 + \ldots + \eta_m \to \max \\
&a_{11}\eta_1 + \ldots + a_{1n}\eta_n \leq 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{m1}\eta_1 + \ldots + a_{mn}\eta_n \leq 1, \\
&\eta_1 \geq 0, \ldots, \eta_n \geq 0.
\end{aligned}$$

Задачи приводятся к канонической форме введением дополнительных неотрицательных переменных и примут вид

$$\begin{aligned}
&\xi_1 + \ldots + \xi_m \to \min \\
&a_{1j}\xi_1 + \ldots + a_{mj}\xi_m - \xi_{m+j} = 1, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (3.1) \\
&\xi_1 \geq 0, \ldots, \xi_{m+n} \geq 0.
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&\eta_1 + \ldots + \eta_m \to \max \\
&a_{i1}\eta_1 + \ldots + a_{in}\eta_n + \eta_{n+i} = 1, \quad i = 1, \ldots, m. \qquad (3.2) \\
&\eta_1 \geq 0, \ldots, \eta_{n+m} \geq 0.
\end{aligned}$$

Для решения канонических задач применяется симплекс-метод. Задачу (3.2) решить проще, т.к. в качестве опорного плана можно взять вектор $\eta^* = \left(\eta_1^*, \ldots, \eta_{n+m}^*\right)$, где $\eta_j^* = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $\eta_{m+i}^* = 1$, $i = 1, \ldots, m$.

Решения ξ^0 и η^0 задач (3.1) и (3.2) связаны следующими соотношениями: если $\eta_j^0 > 0$, то $\xi_{m+j}^0 = 0$, и, если $\xi_j^0 > 0$, то $\eta_{n+i}^0 = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$. Поэтому нет необходимости решать симплекс-методом задачу (3.1). После отыскания решения η^0 задачи (3.2) можно вычислить ξ^0, используя указанные выше соотношения между ξ^0 и η^0 и теорему об активных стратегиях.

Тема 4. Вполне смешанные и симметричные игры

Рассмотрим матричную игру Γ_A с $(m \times n)$-матрицей A и ее смешанное расширение $\overline{\Gamma}_A$. Стратегия x игрока 1 называется *вполне смешанной*, если все чистые стратегии активны, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Ситуация равновесия (x^0, y^0) называется *вполне смешанной,* если стратегии x^0 и y^0 вполне смешанные. Игра Γ_A называется *вполне смешанной*, если все ситуации равновесия вполне смешанные.

Вполне смешанная игра Γ_A имеет единственную ситуацию равновесия (x^0, y^0) и квадратную матрицу игры, т.е. $m = n$. Если значение игры $v_A \neq 0$, то матрица A невырожденная и

$$x^0 = \frac{uA^{-1}}{uA^{-1}u},\ y^0 = \frac{A^{-1}u}{uA^{-1}u},\ v_A = \frac{1}{uA^{-1}u},$$

где $u = (1,1,...,1) \in R^n$, A^{-1} — обратная матрица, т.е. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ — единичная матрица, $I = \mathrm{diag}(1,1,...,1)$.

Примером вполне смешанной игры является (2×2)-игра без седловой точки.

Игра Γ_A с квадратной матрицей A называется *симметричной*, если A — кососимметричная матрица, т.е. $a_{ij} = -a_{ji}$, $i,j = 1,..., n$.

У кососимметричной матрицы диагональные элементы $a_{ii} = 0$, $i = 1,...,n$ и транспонированная матрица $A^T = (a_{ij}^T)$, $a_{ij}^T = a_{ji}$, равна A, $A^T = A$. Множества стратегий игроков совпадают, $X = Y$, а значение игры $v_A = 0$.

Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -7 & -11 & -15 \\ 3 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 7 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 11 & 2 & -7 & 0 & 15 \\ 15 & 5 & -5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Первые стратегии игроков доминируемы и могут быть отброшены. Получим матрицу меньшего размера.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & -7 & 0 & 15 \\ 5 & -5 & -15 & 0 \end{pmatrix}$$

Все стратегии не могут быть активными, иначе $H(x^0, j) = 0$, $j = 2,3,4,5$, т.е.

$$\begin{aligned} -x_3^0 + 2x_4^0 + 5x_5^0 &= 0, \\ x_2^0 \qquad - 7x_4^0 - 5x_5^0 &= 0, \\ -2x_2^0 + 7x_3^0 \qquad - 15x_5^0 &= 0, \\ -5x_2^0 + 5x_3^0 + 15x_4^0 \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Эта система не совместна. Перебирая варианты, находим существенную подматрицу, игра с которой является вполне смешанной и имеет единственное решение. Это матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{x}^0 = \tilde{y}^0 = \left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right).$$

Стратегии $x^0 = y^0 = \left(0, 5/11, 5/11, 0, 1/11\right)$ образуют ситуацию равновесия в исходной игре, т.е. (x^0, y^0) — искомое решение.

Тема 4. Итеративный метод решения матричных игр — метод Брауна-Робинсона

Идея метода состоит в многократном разыгрывании игры в чистых стратегиях. Одно повторение игры называется партией. При первом разыгрывании чистые стратегии выбираются произвольным образом, а в последующих партиях чистые стратегии выбираются так, чтобы оптимизировать результат против смешанной стратегии противника, получаемой усреднением по всем предыдущим партиям.

Пусть за первые k партий игрок 1 использовал i-ю стратегию ξ_i^k раз, а игрок 2 использовал j-ю стратегию η_j^k раз. Тогда в $k+1$-й партии игрок 1 будет использовать стратегию i_{k+1}, а игрок 2 — стратегию j_{k+1} так, что

$$\bar{v}^k = \max_i H\left(i, \eta^k\right) = H\left(i_{k+1}, \eta^k\right),$$

$$\underline{v}^k = \min_j H\left(\xi^k, j\right) = H\left(\xi^k, j_{k+1}\right),$$

где $\xi^k = \left(\xi_1^k, \ldots, \xi_m^k\right)$, $\eta^k = \left(\eta_1^k, \ldots, \eta_n^k\right)$.

В силу однородности функции $H(\xi, \eta) = \sum_{i,j} a_{ij} \xi_i \eta_j$

$$\frac{\bar{v}^k}{k} = H(i_{k+1}, \frac{\eta^k}{k}), \quad \frac{\underline{v}^k}{k} = H(\frac{\xi^k}{k}, j_{k+1}).$$

Пусть v — значение игры. Известно, что

$$\max_x \min_j H(x, j) = \min_y \max_i H(i, y) = v,$$

Векторы $\frac{\xi^k}{k}$ и $\frac{\eta^k}{k}$ есть смешанные стратегии игроков 1 и 2 соответственно. Поэтому

$$\max_k \frac{\underline{v}^k}{k} = \max_k \min_j H(\frac{\xi^k}{k}, j) \le \max_x \min_j H(x, j) = v \le \min_k \frac{\bar{v}^k}{k}.$$

Можно показать, что

$$\lim_{k \to \infty}\left(\min_k \frac{\bar{v}^k}{k}\right) = \lim_{k \to \infty}\left(\max_k \frac{\underline{v}^k}{k}\right) = v.$$

Описанный метод позволяет приближенно находить решение произвольной матричной игры. Недостатками метода являются низкая скорость сходимости, уменьшающаяся с увеличением размерности матрицы, и немонотонность последовательностей $\left\{\frac{\bar{v}^k}{k}\right\}$ и $\left\{\frac{\underline{v}^k}{k}\right\}$. Эти недостатки хорошо видны на элементарном примере (2×2)-игры с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 5. Неантагонистические игры

В реальных задачах принятия решения в конфликтной ситуации число участников нередко более двух. В этом случае возможны два варианта игры:

1. Игрокам не разрешается вступать в соглашения (коалиции);

2. Игроки могут заключать соглашения.

В первом случае каждый игрок действует самостоятельно, стремясь максимизировать свой выигрыш. Такие игры называются *бескоалиционными.* Во втором случае игроки могут заключать коалиции, совместно действуя против других игроков. Такие игры называются *кооперативными.*

Система $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$, где $N = \{1, ..., n\}$ — множество игроков, X_i — множество стратегий i-го игрока, H_i — величина выигрыша i-го игрока, определенная на множестве ситуаций $X_1 \times ... \times X_n$, называется *бескоалиционной игрой.* Матричная игра есть частный случай бескоалиционной игры. Конечная бескоалиционная игра двух игроков называется *биматричной,* т.к. она может быть задана двумя матрицами A и B или одной матрицей, элементами которой являются пара чисел (a_{ij}, b_{ij}).

<u>Пример</u> (*Охрана окружающей среды*).

Три предприятия используют речную воду для технических потребностей. Каждое предприятие имеет две стратегии: построить очистные сооружения (первая стратегия) или сбрасывать отходы в реку без очистки (вторая стратегия). Если неочищенную воду сбрасывают не более одного предприятия, то вода в реке еще пригодна для использования. Если отходы сбрасывают в реку не меньше двух предприятий, то она становится непригодной для использования и каждое предприятие несет убытки в размере 3 единиц, независимо от того, имеет оно очистные сооружения или нет. Стоимость очистных сооружений равна 1 единице.

Множество ситуаций игры можно представить графически в виде вершин куба, т.к. всего ситуаций восемь. Каждой ситуации ставится в соответствие вектор выигрыша предприятий. Выпишем последовательность пар троек в виде отношений, где в числителе стоит ситуация, а в знаменателе — вектор выигрышей игроков:

$$\frac{(1,1,1)}{(-1,-1,-1)},\ \frac{(2,1,1)}{(0,-1,-1)},\ \frac{(2,2,1)}{(-3,-3,-4)},\ \frac{(1,2,1)}{(-1,0,-1)},$$
$$\frac{(1,1,2)}{(-1,-1,0)},\ \frac{(2,1,2)}{(-3,-4,-3)},\ \frac{(2,2,2)}{(-3,-3,-3)},\ \frac{(1,2,2)}{(-4,-3,-3)}.$$

Обозначим $(x \| x'_i)$ ситуацию, которая отличается от ситуации x лишь стратегией x'_i i-го игрока, т.е. $(x \| x'_i) = (x_1, ..., x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, ..., x_n)$. Ситуация $\hat{x}$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу* (J.Nash), если $H_i(\hat{x}) \geq H_i(\hat{x} \| x_i)$ $\forall x_i \in X_i$, $i = 1, ..., n$. Стратегия $\hat{x}_i \in X_i$ называется *равновесной,* если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия. Нетрудно видеть, что понятие ситуации равновесия, введенное для матричных игр, является ситуацией равновесия по Нэшу.

В отличие от антагонистической игры, игрок, выбирая равновесную стратегию, не может гарантировать себе выигрыш не меньший, чем $H_i(\hat{x})$, поэтому равновесная стратегия не может трактоваться как оптимальная.

<u>Пример</u>. Рассмотрим биматричную игру

$$\begin{pmatrix} (5,5) & (0,10) \\ (10,0) & (1,1) \end{pmatrix}$$

Здесь одна ситуация равновесия, $(2,2)$, которая дает вектор выигрышей (1.1). Если же игроки выберут первые стратегии, то оба получают больший выигрыш, чем в ситуации равновесия. Такого в антагонистических играх быть не может.

Пример показывает, что в неантагонистических играх есть другие принципы оптимальности, приводящие к более выгодной для всех участников игры ситуации, чем ситуация равновесия по Нэшу. Таким является принцип оптимальности по Парето. Ситуация $\tilde{x}$ в бескоалиционной игре Γ называется *оптимальной по Парето*, если не существует ситуации $x \in X$, для которой имеют место условия: $H_i(x) \geq H_i(\tilde{x})$ для всех $i \in N$ и $H_{i_0}(x) > H_{i_0}(\tilde{x})$ хотя бы для одного $i_0 \in N$.

Подчеркнем существенное различие понятий. В равновесной по Нэшу ситуации ни один из игроков, действуя в одиночку, не может увеличить свой выигрыш. В оптимальной по Парето ситуации все игроки, действуя согласованно, могут увеличить свой выигрыш.

В последнем примере ситуация (1.1) оптимальна по Парето.

Ситуация равновесия по Нэшу в чистых стратегиях существует крайне редко. Подобно матричной игре смешанные стратегии в бескоалиционной игре определяются как вероятностное распределение на множестве чистых стратегий. Для краткости ограничимся классом биматричных игр. Рассмотрим биматричную игру $\Gamma = (A,B)$ с $(m \times n)$-матрицами $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Обозначим $x = (x_1,\dots,x_m) \geq 0$, $x_1 + \dots + x_m = 1$, и $y = (y_1,\dots,y_n) \geq 0$, $y_1 + \dots + y_n = 1$, смешанные стратегии игрока 1 и 2 соответственно. Средние выигрыши игроков в ситуации (x,y) определяются как

$$H_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \quad H_2(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j .$$

Ситуация (x^0, y^0) называется *ситуацией равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях* в биматричной игре $\Gamma = (A,B)$, если для всех i и j, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, справедливы неравенства

$$H_1(i,y^0) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq H_1(x^0,y^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i^0 y_j^0,$$

$$H_2(x^0,j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i \leq H_2(x^0,y^0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i^0 y_j^0.$$

В любой биматричной игре существует ситуация равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

Также как и в матричной игре вводятся понятия *активной стратегии, вполне смешанной стратегии* и *вполне смешанной ситуации*. Пусть (x,y) — ситуация равновесия, тогда для любой активной стратегии i игрока 1 (стратегии j игрока 2) справедливы равенства

$$H_1(i,y) = H_1(x,y) \quad (H_2(x,j) = H_2(x,y)).$$

Тема 6. Позиционные игры.

Позиционная игра является математической моделью динамического конфликтно-управляемого процесса, участники которого могут последовательно делать конечное число ходов. Самым простым классом позиционных игр является класс конечношаговых игр с полной информацией.

Для описания позиционной игры нам потребуется понятие древовидного графа. *Графом* будем называть пару множеств $G = (X, P)$, где X — множество *вершин*, P — множество дуг, *дуга* есть упорядоченная пара (x, y) вершин графа, вершина x называется началом, а y — концом дуги. Множество дуг определяет многозначное отображение $F: X \to X$, $x \mapsto F_x$, множества вершин в себя, поэтому граф можно определять заданием отображения F и обозначать парой (X, F). *Путь* есть последовательность дуг $p = (p_1, ..., p_k, ...)$ такая, что конец предыдущей дуги совпадает с началом последующей. *Длиной пути* p назовем число $l(p) = s$, равное количеству входящих в нее дуг. *Циклом* называется конечный путь, начинающийся и заканчивающийся в одной и той же вершине. Пару вершин x и y назовем *ребром*, если либо (x, y), либо (y, x) является дугой. *Цепью* называется последовательность ребер $\{(x_k, y_k)\}$ такая, что $y_{k-1} = x_k$, $y_k = x_{k+1}$. Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить цепью. *Дерево* или *древовидный граф* есть конечный связный граф без циклов, имеющий не менее двух вершин, в котором имеется единственная вершина x_0, соединенная путем с любой другой вершиной, называемая *начальной вершиной графа*.

Дадим определение *многошаговой игры с полной информацией*. Пусть $G = (X, F)$ — древовидный граф и дано разбиение множества вершин (называемых далее *позициями*) X на непересекающиеся подмножества $X_1, ..., X_{n+1}$, где $F_x = \phi$ при $x \in X_{n+1}$. Множество X_i называется *множеством очередности* i-го игрока $i = 1, ..., n$, а X_{n+1} — *множеством окончательных позиций*. На множестве окончательных позиций определены функции $H_i : X_{n+1} \to R$, $i = 1, ..., n$, выигрышей игроков.

Игра происходит так. Если начальная вершина графа $x_0 \in X_{i_0}$, то в позиции x_0 «ходит» игрок i_0 и выбирает следующую позицию $x_1 \in F_{x_0}$, если $x_1 \in X_{i_1}$, то «ходит» игрок i_1 и выбирает позицию $x_2 \in F_{x_1}$ и т.д. Игра завершается, когда достигается позиция $x_T \in X_{n+1}$. Однозначно определенный путь $x_0, x_1, ..., x_T$ называется *партией*. По окончании партии игрок i получает выигрыш $H_i(x_T)$, $i = 1, ..., n$.

Пусть игрок i, совершая выбор в позиции $x \in X_i$, знает эту позицию и, следовательно, знает весь предыдущий путь, т.е., имеет полную информацию об игре. Примерами таких игр являются шашки и шахматы.

Однозначная функция u_i, которая каждому $x \in X_i$ ставит в соответствие некоторую позицию $y \in F_x$, называется стратегией i-го игрока, а $u = (u_1, ..., u_n)$ — ситуацией, $u \in U = U_1 \times ... \times U_n$, где U_i — множество стратегий i-го игрока. Каждая ситуация u однозначно определяет партию $x_0, x_1, ..., x_T$ и можно определить функцию $K_i : u \mapsto H_i(x_T)$ выигрыша i-го игрока в любой ситуации $u \in U$. Таким образом, мы представили позиционную игру в виде бескоалиционной игры в нормальной форме $\Gamma = (N, \{U_i\}_{i \in N}, \{K_i\}_{i \in N})$, где $N = \{1, ..., n\}$.

Теорема о существовании абсолютного равновесия по Нэшу.

Тема 7. Кооперативные игры.

В кооперативной игре игрокам разрешаются совместные действия и перераспределение выигрышей. Пусть $N = \{1, ..., n\}$ — множество игроков, любое подмножество $S \subset N$ назовем *коалицией*. Постулируется, что максимальная коалиция, объединяющая всех игроков, наиболее выгодна с точки зрения каждого игрока. *Характеристической функцией* игры называется функция v, определенная на подмножествах множества N и обладающая свойством *супераддитивности*:

$$v(\phi)=0, \qquad v(S_1)+v(S_2)\le v(S_1\cup S_2)$$

для любых непересекающихся коалиций $S_1, S_2 \in N$. Тогда для любых непересекающихся коалиций $S_1,...,S_k$ $v(S_1)+...+v(S_k)\le v(N)$. Число $v(S)$ интерпретируется как гарантированный выигрыш коалиции, когда она действует независимо от остальных игроков. Для игры с постоянной суммой $v(S)+v(N\setminus S)=v(N)$. Обозначим (N,v) кооперативную игру с характеристической функцией v.

Основная задача теории кооперативных игр состоит в построении реализуемых принципов оптимального распределения суммарного выигрыша $v(N)$ между игроками. Пусть α_i — сумма, которую i-й игрок получит в максимальной коалиции N. Вектор $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ называется *дележом*, если $\alpha_i \ge v(\{i\})$, $i=1,...,n$, и $\alpha_1+...+\alpha_n=v(N)$. Игра называется *существенной*, если $v(\{1\})+...+v(\{n\})<v(N)$, и *несущественной* в противном случае.

Обозначим $\alpha(S)=\sum_{i\in S}\alpha_i$. Будем говорить, что дележ α *доминирует* дележ β по коалиции S (обозначается $\alpha\succ\beta$), если $\alpha_i>\beta_i$, $i\in S$, и $\alpha(S)\le v(S)$. Множество недоминируемых дележей игры (N,v) называется C*-ядром.*

Для того, чтобы дележ α принадлежал C-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для любой коалиции $S\subset N$ $\alpha(S)\ge v(S)$.

Пример (*Джаз-оркестр*). Директор клуба обещает 100 у.е. певцу S, пианисту P и ударнику D за совместное выступление. Дуэт S+P оценивается в 80 у.е., P+D — в 65 у.е., а выступление одного пианиста — в 30 у.е. Дуэт S+D заработает 50 у.е., а певец — 20 у.е. Один ударник ничего не заработает. Обозначим цифрами 1, 2, 3 музыкантов S, P и D соответственно. Получаем кооперативную игру трех игроков (N,v), $N=\{1,2,3\}$, $v(1,2,3)=100$, $v(1)=20$, $v(2)=30$, $v(3)=0$, $v(1,2)=80$, $v(1,3)=50$, $v(2,3)=65$. Другие коалиции не рассматриваются.

Вектор $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ принадлежит C-ядру тогда и только тогда, когда

$\alpha_1\ge 20$, $\alpha_2\ge 30$, $\alpha_3\ge 0$,

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=100$,

$\alpha_1+\alpha_2\ge 80$, $\alpha_2+\alpha_3\ge 65$, $\alpha_1+\alpha_3\ge 50$.

Это множество есть выпуклая оболочка трех дележей (35, 45, 20), (35, 50, 15) и (30, 50, 20). Дележ $\alpha^*=(33{,}3;\ 48{,}3;\ 18{,}3)$ является справедливым компромиссом внутри C-ядра.

Литература.

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. – М.: Высш.шк., Кн. дом "Университет", 1998.
2. Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.:Наука, 1985.
3. Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. – М.: Физматгиз, 1960.
4. Крушевский А.В. Теория игр. – К.: Вища школа, 1977.

5. Мулен Э. Теория игр. С примерами из математической экономики. – М.: Мир. 1985.
6. Оуэн Г. Теория игр. – М.: Мир, 1971.
7. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. введение в прикладную теорию игр. – М.: Наука, 1981.
8. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. – М.: Мир, 1964.
9. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. – М.: Наука, 1970.
10. Eichberger J. Game Theory for Economists. – San Diego: Academic Press, 1997.