Курс *"Экономическая динамика"*

Рыбников М. С.
доцент кафедра информационных систем

1. Цель и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе.

Рост масштабов народного хозяйства, качественные сдвиги в экономике, все усиливающаяся конкуренция, современный уровень требований к специалисту в области экономики и менеджмента заставляет последнего изучать предметы, связанные с модельной структуризацией и анализом. Большую роль в экономическом моделировании играет моделирование экономических процессов, протекающих во времени, или процессов, когда значение величин на данный момент времени существенно зависит от предистории изучаемого процесса. Нынешние специалисты в области экономики и управления весьма слабо знакомы с динамическими моделями и математическим аппаратом, который их описывает. Поэтому предполагается включить данную дисциплину в список предметов учебного плана, подлежащих изучению.

Цель данного курса – ознакомить студентов с аппаратом обыкновенных дифференциальных уравнений, методами их решения, качественной теорией этих уравнений, устойчивостью решений и применением этого аппарата при создании моделей практических экономических задач и задач управления. Учитывая достаточно серьезный уровень математической подготовки студентов, в достаточном объеме освящаются теоретические вопросы дифференциальных уравнений.

Основными задачами данного курса являются обучение студентов экономических и менеджерских специальностей:

- свободному владению аппаратом дифференциальных уравнений;
- владению аналитическими и численными методами их решения;
- умению доказать устойчивость решения и сходимость применяемого численного метода, определить погрешность получаемого результата;
- умению составлять алгоритмы и программы для ЭВМ, реализующие приближенные методы решения;
- пользоваться стандартным математическим обеспечением ЭВМ;
- умению составлять простые модели задач планирования и управления.

Одной из задач курса является воспитание культуры системного мышления, зависящего даже не столько от количества усвоенных знаний, сколько от умения ими пользоваться, умения логически мыслить, обдумывать результаты, строить правильные рабочие гипотезы и четко формулировать задачу.

Учитывая небольшой объем (1 семестр, 72 часов) курса, предполагается использовать следующие методические возможности:

1. Чтение проблемных лекций по большинству изучаемых разделов дисциплины.
2. Самостоятельное изучение отдельных вопросов по предлагаемой литературе.
3. Проведение коллоквиумов по проблематике, сформулированной на лекциях.
4. Проведение лабораторных практических занятий для закрепления теоретических знаний.

Желательно, чтобы этому курсу предшествовал курс высшей математики. По окончании семестра предполагается проведение теоретического экзамена.

1. Тематический план дисциплины.

А. Распределение учебного времени, отводимого на дисциплину.

Темы	Количество часов				
	Всего	Лекци и	Лабор аторные	Семи нарские	Самос тоятельно
1. Введение.	2	2			
2. Псевдодинамические задачи планирования и управления.	20	8		4	8
3. Математический аппарат динамических исследований.	50	18	24		8
4. Некоторые экономические приложения задач динамики.	24	8	4	4	8

Б. Содержание тем дисциплины.

1. Введение.

Моделирование. Метод подобия. Модель. Физическое и абстрактное, математическое моделирование. Экономико-математическое моделирование, применение, определение экономической динамики и ее место в микро и макроэкономическом моделировании. Историческая и библиографическая справка.

Обзор предлагаемых вопросов.

При изучении сложных процессов и явлений очень часто применяется моделирование. Исторически первым из известных приемов моделирования является метод подобия, суть которого заключается в воспроизведении изучаемого явления или процесса в экспериментальных условиях. Экономика как объект моделирования обладает следующими двумя особенностями:

1. В экономике невозможны модели подобия, которые широко применяются в технике и естественных науках.
2. В экономике крайне ограничены возможности локальных экономических экспериментов. Поскольку ее части жестко взаимосвязаны друг с другом и, следовательно, “чистый” эксперимент невозможен.

Исследовать же явление или процесс теоретически в чистом виде не представляется возможным из-за невозможности учета всех факторов, влияющих на исследуемый процесс или явление. Поэтому несущественные, с точки зрения исследователя, факторы отбрасывают, а их влияние на процесс или результат не учитывают, что приводит к некоторому упрощению реальной действительности, называемому моделью.

Модель - это специально создаваемый объект или процесс, на котором воспроизводятся вполне определенные характеристики исследуемого объекта или процесса с целью его изучения.

Моделирование - процесс построения модели.

Модели могут быть реализованы как с помощью некоторых физических объектов (*физическая модель*), так и с помощью абстрактных объектов (*абстрактная модель*). Такой абстрактной моделью могут быть, в частности, математические выражения (*математическая модель*).

Математическое моделирование является наиболее совершенным и вместе с тем наиболее эффективным методом моделирования. Естественно, результаты исследования такой модели будут иметь практический интерес, если сама модель достаточно адекватна рассматриваемому процессу или явлению. При построении моделей обычно следуют путем от простых моделей, позволяющих получать качественную картину изучаемого явления или процесса, к сложным, изучение которых позволяет избежать ошибок, зная тенденции, даваемые простыми моделями, и дает числовой материал, которому можно уже доверять.

Экономическая наука уже давно использует модели. Одной из первых макроэкономических моделей была модель воспроизводства Кене, построенная им в 1758 году. По мере все более широкого привлечения математического аппарата для исследования и решения экономических задач возникла необходимость в создании математических методов, специально приспособленных к задачам экономического анализа. Именно этому обязан своим происхождением ряд новых математических дисциплин таких, как линейное программирование, динамическое программирование, теория игр, теория графов, теория массового обслуживания и др.

Задачи, решаемые экономической наукой и практикой, делятся, в зависимости от учета фактора времени, на статические и динамические. Статика изучает состояние экономических объектов либо на данный момент времени, либо считает все величины не зависящими от времени. В динамических задачах отражается не только зависимость величин от времени, но и их взаимосвязи во времени. Время в экономической динамике может рассматриваться не только как непрерывная величина, но и как дискретная. В зависимости от этого используется различный математический аппарат от динамического программирования до обыкновенных дифференциальных уравнений.

При системном исследовании экономики с помощью математических моделей выделяют макро- и микромодели. Первые отражают функционирование и развитие всей экономической системы или ее достаточно крупных подсистем, в то время как вторые - хозяйственных единиц и их объединений.

Если речь идет о макромоделях, то хозяйственные ячейки считаются неделимыми, если исследуются микромодели. То хозяйственная единица в свою очередь может рассматриваться как сложная система.

1. Псевдодинамические задачи планирования и управления.

Основные понятия и определения. Динамическое программирование как метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений. Устойчивость цен и объемов товаров на рынке при наличии запаздывания по времени. Параметрическая *транспортная задача. Задача распределения инвестиций в сельскохозяйственном производстве. Задача составления расписаний.*

Обзор предлагаемых вопросов.

В исследовании операций возникла определенная терминология. Поскольку под операцией понимается любое целенаправленное действие, то в качестве *модели операции - представляется некоторая совокупность, состоящая из субъекта, формулирующего цель операции, запаса активных средств (ресурсов) для проведения операции, набора стратегий, то есть способов использования этих ресурсов, и критерия - способа сравнения различных стратегий, преследующих достижения цели операции.*

Динамическое программирование – раздел исследования операций, представляющий собой метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений. Вообще говоря, ход процессов такого рода заранее не определен. Его нужно организовать, причем так, чтобы получить наибольший эффект с точки зрения принятого критерия эффективности действий.

Динамическое программирование основывается на важных принципах оптимальности и вложения. Принцип оптимальности состоит в том, что необходимо всегда обеспечить оптимальное (в смысле принятого критерия) продолжение процесса относительно уже достигнутого его состояния. Принцип вложения утверждает, что природа задачи, допускающей динамическое программирование, не меняется при изменении количества шагов.

В качестве примера рассмотрим задачу распределения инвестиций в сельскохозяйственном производстве с учетом того, что урожайность сельскохозяйственных культур зависит от погодных условий и поэтому является случайной величиной. Эта задача является многошаговой задачей принятия решений, поскольку изучается динамический процесс, развертывающийся во времени, а планирование инвестиций производится на ряд лет вперед. Случайными факторами здесь являются погодные условия и зависящая от них урожайность.

Обозначим q- урожайность на поливных землях, p- урожайность на неполивных землях. Будем считать, что $q \geq p$ при одних и тех же погодных условиях. Функции распределения F_p и F_q величин p и q считаются известными для данного региона. Пусть $S(n)$, $R(n)$ - площади неполивных и поливных земель в год n. Суммарную площадь сельскохозяйственных угодий в год n будем считать известной

$$S(n) + R(n) = S^*(n) \tag{1}$$

Потребность в зерне $\Phi(n)$ в год n будем считать известной. Суммарный урожай в год n будет случайной величиной

$$\Phi^+(n) = pS(n) + qR(n)$$

и для нее можно вычислить функцию распределения $F_{\Phi^+(n)}$. Разность $\Phi^+(n) - \Phi(n)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Если она положительна, то избыток урожая отправляется на склад, а если отрицательна, то недостаток можно взять со склада. Эта разность должна удовлетворять некоторым очевидным соотношениям.

Так на склад нельзя положить зерна больше, чем имеющиеся на нем емкости. В свою очередь, величина свободных емкостей зависит от предистории, то есть от того, какие инвестиции направлялись на их строительство, реконструкцию и развитие.

Обозначим через $Q(n)$ - количество зерна, которое может поместиться на склад либо быть взято со склада. В первом случае считаем, что $Q(n) > 0$, а во втором случае $Q(n) < 0$. Пусть $B(n-1)$ - количество зерна, хранимое на складе в год $n-1$ и пусть $G(n)$ - суммарная емкость складов в год n. Тогда

$$Q(n) = \begin{cases} \min(\Phi^+(n) - \Phi(n),\ \ G(n) - B(n-1)), & \Phi^+(n) \ge \Phi(n) \\ \max(\Phi^+(n) - \Phi(n),\ \ -B(n-1)), & \Phi^+(n) < \Phi(n) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Все величины Q, B, G, Ф, вычисляемые в одних и тех же единицах, должны удовлетворять динамическим соотношениям

$$G(n) = G(n-1) + \frac{x(n-1)}{c_x} \qquad \textbf{(3)}$$

$$B(n) = B(n-1) + Q(n) \qquad \textbf{(4)}$$

где через x(n-1) обозначены капитальные затраты на строительство складов, а c_x - стоимость единицы емкости склада.

Величина $\Phi^+(n)$ зависит от количества поливных земель $R(n)$, величина которых определяется соотношением

$$R(n) = R(n-1) + \frac{y(n-1)}{c_y} \qquad \textbf{(5)}$$

Здесь c_y - затраты на единицу орошаемой площади, $y(n-1)$ - капитальные вложения на орошение в $n-1$ году.

Уравнения (1), (3)-(5), где величина Q определяется соотношением (2), есть математическая модель изучаемого многошагового процесса. Величины x(n) и $y(n)$ связаны ограничением

$$x(n) + y(n) = z(n) \qquad \textbf{(6)}$$

где $z(n)$ - выделенные суммарные инвестиции на строительство и орошение.

Задавая тем или иным способом x(n) и $y(n)$ и начальное состояние региона $G(0)$, $B(0)$, $R(0)$ можно вычислить распределение дефекта

$$\Delta(n) = S(n)p + R(n)q - \Phi(n) - Q(n) \qquad \textbf{(7)}$$

для любого года n.

Необходимо теперь сформулировать критерий эффективности. Очевидно, что чем меньше математическое ожидание абсолютной величины дефекта (7), тем система лучше. Поэтому в качестве критерия, оценивающего функционирование системы за год n, можно принять величину этого математического ожидания

$$J(x,y) = M(|\Delta(n)|)$$

Но система функционирует не год, а много лет. Тогда, обозначив через N горизонт планирования, в качестве критерия, оценивающего систему в целом, можно принять

$$J_1 = \max_{1 \le n \le N} M(|\Delta(n)|) \qquad \textbf{(8)}$$

или

$$J^{*}_{1} = M(\max_{1 \le n \le N}|\Delta(n)|) \qquad \textbf{(9)}$$

Критерий (9) может оказаться более удобным, тем более, что $J_1 \le J_1^{*}$, но вычислить J_1 проще, чем J_1^{*}.

Наряду с критерием (8) используют и критерий

$$J_2 = \sum_{n=1}^{N} M(|\Delta(n)|) \qquad \textbf{(10)}$$

Положительные и отрицательные дефекты не равнозначны. Если $\Delta(n) > 0$, то это означает, что часть урожая просто пропадет, т.к. ее некуда складировать, а если $\Delta(n) < 0$, то зерна для покрытия потребностей не хватает и его необходимо где-то брать.

Таким образом в качестве еще одного критерия можно взять величину J_3, аналогичную (10), но усреднение которой проводится только по отрицательным дефектам. Следовательно, в одной и той же операции могут фигурировать самые различные критерии эффективности. А поскольку стратегия определяется из условия

$$J_i \to \min, \qquad i = 1,2,3 \qquad \textbf{(11)}$$

то каждому J_i будет соответствовать своя стратегия. *Решение одной из задач (11) будем называть ее оптимальной стратегией.*

2. Математический аппарат динамических исследований.

Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами. Уравнения, приводимые к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям первого порядка. Качественные решения: фазовая плоскость, фазовые диаграммы. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, общие сведения. Общее решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Зависимость частного решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами от вида правой части. Фазовые диаграммы. Интегральные преобразования (общие сведения). Интегральные преобразования Лапласа. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Устойчивость решений, теорема Ляпунова. Приближенные методы решения: метод Пикара, метод Эйлера, метод степенных рядов, методы Рунге-Кутта. А-устойчивость численных методов, сходимость, оценка погрешности.

Разностные уравнения, общие сведения. Линейные разностные уравнения. Нелинейные разностные уравнения. Сходимость итерационных процессов.

Нет смысла раскрывать содержание понятий, перечисленных в данном пункте, т.к. его всегда можно найти в приведенном списке литературы. С другой стороны данный раздел обсуждаемого курса это обзор хорошо изученного раздела высшей математики – теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для изучения которого существует множество хороших и очень хороших учебников и пособий.

3. Некоторые экономические приложения задач динамики.

Модели, приводимые к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка: простейшая модель равновесия, рыночное равновесие Вальраса, кейнесанская модель, модель экономического роста Харрода-Домара, долговая модель Домара, прибыль и инвестиции, неоклассическая модель экономического роста, схема расширенного воспроизводства Маркса, модель Солоу. Модели, приводимые к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. IS-LM модель в экономике, временная мультипликаторно-акселераторная модель, модель равновесия с накоплением. Модели, приводимые к разностным уравнениям. Бизнес цикл Самуэльсона.

Обзор предлагаемых вопросов.

Показатели, характеризующие динамику экономического объекта, - это абсолютные приросты, темпы роста и прироста. Кроме этого в экономической теории важным является понятие равновесия, то есть такого состояния объекта, которое он сохраняет при отсутствии внешних воздействий. Задачи экономической динамики включают исследование этих показателей, а также как описание процессов выхода к состоянию равновесия, так и процессов трансформации самого состояния под воздействием внешних сил.

Пусть система описывается одним показателем $x(t)$. Будем считать, что скорость изменения показателя пропорциональна величине его отклонения от равновесного значения x_e. Если связь линейна, то уравнение для показателя имеет вид:

$$x' = k(x - x_e),$$

где k- некоторый коэффициент пропорциональности. Решение этого неоднородного уравнения есть $x = x_e + ce^{kx}$. С учетом начальных условий $x|_{t=0} = x(0)$ получим $x = x_e + (x(0) - x_e)e^{kx}$. Система имеет асимптотический выход к состоянию x_e, если $k < 0$ при любом начальном возбуждении x(0). Равновесное положение x_e - устойчиво. Если $k > 0$, то равновесное положение x_e неустойчиво и любое отклонение от него x(0) приведет к уходу с течением времени от x_e.

В качестве другого примера рассмотрим односекторную модель экономического роста Солоу. В этой модели экономическая система рассматривается как единое целое, производит один универсальный продукт, который может как потребляться, так и инвестироваться. Экспорт-импорт в явном виде не учитывается.

Пусть X – валовой общественный продукт(ВОП), C – фонд производственного потребления, I – инвестиции, L – число занятых, K – фонды, v – годовой темп прироста числа занятых, μ - доля выбывших за год основных производственных фондов, a - коэффициент прямых затрат (доля промежуточного продукта в ВОП), ρ - норма накопления (доля валовых инвестиций в валовом внутреннем продукте). Эти последние четыре переменные находятся в следующих границах: $-1 < v < 1, \quad 0 < \mu < 1, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < \rho < 1$. Эндогенные переменные X, C, I, L, K – зависят от времени, а остальные переменные экзогенные и от времени не зависят.

Норма накопления считается управляющим параметром и устанавливается в начальный момент времени управляющим органом в пределах своих значений.

Предполагается, что годовой выпуск в каждый момент времени определяется линейно-однородной неоклассической производственной функцией

$X = F(K, L)$.

Рассмотрим, как меняются ресурсные показатели за небольшой промежуток времени Δt. Согласно определению темпа прироста

$$\frac{\Delta L}{L} = v\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} = vL,$$

поэтому

$$\ln L = vt + \ln A, \quad L = Ae^{vt}.$$

Используя начальное условие $L(0) = L_0$, получаем

$$L = L_0 e^{vt}.$$

Износ и инвестиции в расчете на год равны μK, I соответственно, а за время Δt - соответственно $\mu K\Delta t$, $I\Delta t$, поэтому прирост фондов за это время

$$\Delta K = -\mu K\Delta t + I\Delta t,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + I, \quad K(0) = K_0.$$

Поскольку промежуточный продукт равен aX, то валовой внутренний продукт равен $(1-a)X$, в том числе инвестиции $I = \rho(1-a)X$ и фонд потребления $C = (1-\rho)(1-a)X$.

Итак получаем следующую запись модели Солоу в абсолютных показателях:

$$L = L_0 e^{vt}; \quad \frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)X, \quad K(0) = K_0;$$

$$X = F(K, L); \quad I = \rho(1-a)X; \quad C = (1-\rho)(1-a)X$$

B. Планы семинарских и практических занятий.

№ темы	Наименование практикума	Вид практикума	Содержание	Кол-во часов
2	Псевдодинамические задачи планирования и управления.	Семинар	Динамическое программирование, основные определения и понятия, задачи, модели, применяемые алгоритмы решения.	2
		Семинар	Математические модели дискретных экономических задач. Раскрытие возникающих неопределенностей.	2
3	Математический аппарат динамических исследований.	Лаб. работа	Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.	2
		Лаб. работа	Линейные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.	2
		Лаб. работа	Линейные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.	2
		Лаб. работа		2

		Лаб. работа Лаб. работа Лаб. работа Лаб. работа Лаб. работа Лаб. работа Лаб. работа	Линейные однородные уравнення второго порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение, общее решение. Частное решение линейных уравнений второго порядка. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравненнй. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Метод Рунге-Кутта 4-5 порядка точности, алгоритм, сходимость, устойчивость. Фазовая плоскость и фазовые диаграммы. Линейные разностные уравнения. Нелинейные разностные уравнения, методы решения и линеаризации.	2 2 2 2 2 2 2
3		Коллоквиум		2
4	Некоторые экономические приложения задач диннамики.	Лаб. работа Семинар	Построение простейших дннамическнх моделей. Обзор динамических моделей.	4 2
2,4		Коллоквнум		2

1. Формы и методы контроля.

Весь материал курса разбит условно на две части. По каждой из частей проводится теоретический коллоквиум. Вопросы, выносимые не коллоквиум, приводятся ниже.

Первый коллоквиум.

1. Основные понятия и определения теории дифференциальных уравнений.
2. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.
3. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.
4. Уравнения, приводимые к обыкновенным линейным дифференциальным уравнениям первого порядка.
5. Качественные решения: фазовая плоскость, фазовые диаграммы.
6. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения второго порядка, общие сведения.
7. Общее решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

8. Зависимость частного решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами от вида правой части.
9. Фазовые диаграммы для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.
10. Интегральные преобразования (общие сведения).
11. Интегральные преобразования Лапласа.
12. Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
13. Устойчивость решений дифференциальных уравнений, теорема Ляпунова.
14. Метод Пикара.
15. Метод Эйлера.
16. Метод степенных рядов.
17. Методы Рунге-Кутта.
18. А-устойчивость численных методов, сходимость, оценка погрешности.
19. Разностные уравнения, общие сведения.
20. Линейные разностные уравнения.
21. Нелинейные разностные уравнения.
22. Сходимость итерационных процессов.

Второй коллоквиум.

1. Динамическое программирование как метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений.
2. Устойчивость цен и объемов товаров на рынке при наличии запаздывания по времени.
3. Параметрическая транспортная задача.
4. Задача распределения инвестиций в сельскохозяйственном производстве.
5. Задача составления расписаний.
6. Простейшая модель равновесия.
7. Рыночное равновесие Вальраса.
8. Кейнесанская модель.
9. Модель экономического роста Харрода-Домара.
10. Долговая модель Домара.
11. Прибыль и инвестиции.
12. Неоклассическая модель экономического роста.
13. Схема расширенного воспроизводства Маркса.
14. Модель Солоу.
15. IS-LM модель в экономике.
16. Временная мультипликаторно-акселераторная модель.
17. Модель равновесия с накоплением.
18. Бизнес цикл Самуэльсона.

В конце курса итоговым контролем является теоретический экзамен. Экзамен состоит из двух теоретических вопросов и задачи. На экзамен выносятся вопросы коллоквиумов, а также учитываются результаты выполнения лабораторных работ. В случае пропуска части лабораторных работ и (или) неудовлетворительных оценок и при отсутствии отработок по данным долгам к экзаменационной задаче добавляется не зачтенное количество соответствующих задач.

Список литературы

1. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: “ДИС”, 1997.
2. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. – М.: Наука, 1984.
3. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. – М.: Высшая школа, 1986.
4. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981.
5. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика т.1. - Санкт-Петербург: Экономическая школа, 1998.
6. Колемаев В.А. Математическая экономика. - М.: ЮНИТИ, 1998.
7. Pierre N.V. Tu Dynamical Systems. – Springer-Verlag, 1992.