Избранные главы курса "Математика для экономистов"

Смирнова С.И., кандидат физ.–мат. наук, доцент

Тема 1. Прямая на плоскости.

Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым ккоэффициентом. Уравнение прямой в отрезках. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Всякое уравнение первой степени относительно x и y, т.е. уравнение вида

$$Ax+By+C=0 \qquad (1.1)$$

(где A, B и C – постоянные коэффициенты, причем $A^2+B^2 \neq 0$) определяет на плоскости некоторую прямую. Это уравнение называется общим уравнением прямой. Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида

$$y=kx+b \qquad (1.2)$$

(здесь $k= - A/B$, $b= - C/B$). Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом α, поскольку $k=tg\ \alpha$, где α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси $0x$. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью $0y$.

Если в общем уравнении прямой $C \neq 0$, то, разделив все его члены на $-C$, получим уравнение вида

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1.3)$$

(здесь $a=- C/A$, $b=- C/B$). Его называют уравнением прямой в отрезках; в нем a является абсциссой точки пересечения прямой с осью $0x$, а b – ординатой точки пересечения прямой с осью $0y$.

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, записывается в виде

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (1.4)$$

Пример (загрязнение воды). Исследования, проведенные в начале 1986 г. показали, что каждые 1000 литров воды из озера Мичиган содержат 6 миллиграммов загрязнителей – соединений ртути, а аналогичные испытания, проведенные в начале 1988 г. показали, что каждые 1000 литров воды содержат 8 миллиграммов загрязнителей – соединений ртути. Найти ожидаемое содержание загрязнителей – соединений ртути на начало 2006 г., если предположить, что количество загрязнителей – соединений ртути будет расти с той же скоростью, что и в предыдущие годы.

Решение. Пусть y – число миллиграммов загрязнителей – соединений ртути в 1000 литрах воды, а x – время (в годах). Наша задача – найти значение y при x=2006. Известны значения y при x=1986 и при x=1988. Так как мы предположили, что y будет расти с постоянной скоростью, то графиком функции y будет прямая линия. По условию, эта прямая пройдет через точки (1986;6) и (1988;8).

Уравнение прямой примет вид (см. (1.4)):

$$\frac{y-6}{8-6}=\frac{x-1986}{1988-1986}, \qquad \text{или} \qquad y=x-1980.$$

Подставляя x=2006, получим y=26, т.е. в начале 2006 г. озеро Мичиган будет содержать 26 миллиграммов загрязнителей – соединений ртути на каждые 1000 литров.

Тема 2. Матрицы и арифметические операции над ними.

Понятие матрицы. Сложение матриц. Умножение матрицы на число. Умножение матриц.

Матрицей $A=\{a_{ij}\}$ размера $m \times n$ ("m на n") называется таблица, имеющая m строк (горизонтальных линий) и n столбцов (вертикальных линий). Если m=n, то матрица называется квадратной матрицей порядка m. Число a_{ij} называется элементом матрицы, где i – номер строки, а j – номер столбца, на пересечении которых он расположен.

Две матрицы A и B называются равными (A=B), если равны их соответствующие элементы ($a_{ij}=b_{ij}$).

Если матрицы A и B одного размера, то сумма матриц A+B получается суммированием соответствующих элементов матриц A и B.

Нулевой матрицей O называется матрица с нулевыми элементами.

Матрица $-A$ называется противоположной матрице A, если $A+(-A)=0$.

Разность A–B матриц A и B одного размера определяется по формуле $A-B=A+(-B)$.

Умножение матрицы A на число c – это умножение каждого элемента матрицы на число c.

Произведением матриц A ($m\times n$) и B ($n\times p$) называется матрица C ($m\times p$), элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i–й строки матрицы A и j–го столбца матрицы B.

Для операций сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц справедливы следующие правила:

1) $A+B=B+A$; 2) $A+(B+C)=(A+B)+C$; 3) $(c+d)A=cA+dA$;

4) $c(A+B)=cA+cB$; 5) $cdA=c(dA)$; 6) $A(BC)=(AB)C$;

7) $A(B+C)=AB+AC$; 8) $(A+B)C=AC+BC$; 9) $A(cB)=c(AB)=(cA)B$.

Пример. Производитель выпускает два вида продуктов (I и II) на двух фабриках (X и Y). При производстве этих продуктов происходит выделение следующих загрязняющих веществ: двуокиси серы, угарного газа и пылеобразного вещества. Ежедневно каждая фабрика выделяет при производстве продукта I и II соответственно: 300 и 400 кг двуокиси серы, 100 и 50 кг угарного газа, 200 и 300 кг пылеобразного вещества. Эта информация может быть записана в виде матрицы

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\text{Двуокись серы} & \text{Угарный газ} & \text{Пылеобразное вещество}\end{array} \\ A= & \begin{pmatrix} 300 & 100 & 200 \\ 400 & 50 & 300 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Продукт } I \\ \text{Продукт } II \end{array} \end{array}$$

Чтобы удовлетворить требованиям законодательства об охране природы, эти загрязнения должны быть уничтожены. Дневная стоимость в гривнах устранения загрязнений при производстве продуктов на фабриках X и Y соответственно равна: 5гр. и 8 грн. за 1 кг двуокиси серы, 3 гр. и 4 грн. за 1 кг угарного газа, 2 грн. и 1 гр. за 1 кг пылеобразного вещества. Эта стоимостная информация может быть представлена в матричном виде

$$\begin{array}{ccl} & \text{Фабрика X} \quad \text{Фабрика Y} & \\ B = & \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \textit{Двуокись серы} \\ \textit{Угарный газ} \\ \textit{Пылеобразное вещество} \end{array} \end{array}$$

Из первой строки матрицы A и первого столбца матрицы B видно, что дневная стоимость удаления загрязнений, выделяющихся при производстве продукта I на фабрике X составляет 300(5)+100(3)+200(2)=2200 (грн.).Но это элемент первой строки и первого столбца матрицы

$$AB = \begin{pmatrix} 300 & 100 & 200 \\ 400 & 50 & 300 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2200 & 3000 \\ 2750 & 3700 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, каждый элемент в AB имеет физическую интерпретацию – это дневная стоимость уничтожения каждого из трех загрязнений на одной из двух фабрик при производстве продукта I или II.

Тема 3. Предел, непрерывность функции в точке.

Понятие предела последовательности. Предел функции в точке. Односторонние пределы в точке. Свойства пределов. Замечательные пределы. Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация.

Числовой последовательностью называется упорядоченная совокупность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых определяется по заданному правилу соответствия $a_n = f(n)$, где переменная n – натуральное число.

Число А называется пределом числовой последовательности a_n,, если все члены последовательности приближаются к этому числу при неограниченном возрастании номера n: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Предел A функции $y=f(x)$ в точке a записывается в виде $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и означает, что для всех значений x, достаточно близких к числу a (и отличных от него), соответствующие значения функции $y=f(x)$ оказываются сколь угодно близкими к числу A.

Если $x<a$, $x \to a$, то употребляют запись $x \to a-0$; если $x>a$, $x \to a$ – $x \to a+0$. Числа $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называются соответственно левым и правым пределом функции $f(x)$ в точке a. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы $f(a+0)=f(a-0)$.

Основные теоремы о пределах: 1) Предел суммы конечного числа функций, имеющих пределы, равен сумме пределов этих функций. 2) Предел произведения конечного числа функций, имеющих пределы, равен произведению пределов функций. 3) Предел частного от деления двух функций, имеющих пределы, равен частному от деления пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю.

Замечательные пределы: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она определена в окрестности точки a; существует предел функции $f(x)$ в точке a; этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, или $f(a-0)=f(a+0)=f(a)$.

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$, причем не все три числа $f(a-0)$, $f(a+0)$, $f(a)$ равны между собой, то a называется точкой разрыва I рода. Точки разрыва I рода подразделяются в свою очередь, на точки устранимого разрыва (когда $f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$) и на точки скачка (когда $f(a-0)\neq f(a+0)$). Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются точками разрыва II рода.

Тема 4. Производная функции одной переменной.

Определение производной. Геометрический смысл производной. Таблица производных. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции..

Производной от функции $y=f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{4.1}$$

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке (x,y), т.е. $y'=tg\ \alpha$. Производная есть скорость изменения функции в точке x. Отыскание производной называется дифференцированием функции.

Из определения производной (4.1) можно получить таблицу производных:

1) $\left(x^m\right)'=mx^{m-1}$; 2) $\left(a^x\right)'=a^x\ln a$; 3) $\left(e^x\right)'=e^x$;

4) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$; 5) $(\ln x)'=1/x$; 6) $(\sin x)'=\cos x$;

7) $(\cos x)'=-\sin x$; 8) $(tg\,x)'=\sec^2 x$; 9) $(ctg\,x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$;

10) $(\arcsin x)'=-(\arccos x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 11) $(arctg\,x)'=-(arcctg\,x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Основные правила дифференцирования: пусть C – постоянная, $u(x)$, $v(x)$ – **функции, имеющие** производные, тогда

$1) C'=0$; 2) $(u \pm v)'=u' \pm v'$; 3) $(Cu)'=Cu'$; 4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

6) если $y=f(u)$, $u=u(x)$, т.е. $y=f[u(x)]$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции).

Пример. Производитель планирует начать сбрасывать ;жидкие отходы в близлежащее озеро. Производство таково, что объем отходов, сбрасываемых за время t, будет $A = 3t^{3/2}$, где A (в литрах) и t (в неделях) отсчитывается от начала сброса. Жидкость разлагается с постоянной скоростью 27 литров в неделю. Через какое время производитель будет сбрасывать жидкость быстрее, чем она успеет разложиться?

Решение. Скорость, с которой будет сбрасываться жидкость, равна $\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^{3/2}) = 3\left(\frac{3}{2}\right)t^{1/2} = \frac{9}{2}\sqrt{t}$ (литров в неделю).

Итак, производитель будет сбрасывать отходы с той же скоростью, с которой разлагается материал, когда $\frac{9}{2}\sqrt{t} = 27$, $\sqrt{t} = \frac{2}{9} \cdot 27 = 6$, $t=36$.

Таким образом, через 36 недель производитель будет сбрасывать жидкость быстрее, чем она успеет разложиться.

Тема 5. Неопределенные и определенные интегралы.

Понятие и свойства неопределенного интеграла. Основные приемы интегрирования. Понятие и свойства определенного интеграла. Связь неопределенных и определенных интегралов.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$, или $dF(x)=f(x)dx$. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных: $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – постоянная.

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функций. Правила интегрирования:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$; 2) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; 3) $\int dF(x) = F(x) + C$;

4) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$; 5) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Интегрирование – это восстановление исходной функции по ее производной, т.е. интегрирование и дифференцирование – взаимно обратные операции. Таблица основных интегралов легко следует из таблицы производных.

Основные приемы интегрирования: *непосредственное интегрирование, замена переменных в неопределенном интеграле, интегрирование по частям, интегрирование рациональных и тригонометрических функций, дифференциального бинома.*

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разделим его на n произвольных частей: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, выберем на каждом $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i. Интегральной суммой для функции f(x) на отрезке $[a,b]$ называется сумма вида $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$).Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ определяется по формуле:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S. \qquad (5.1)$$

Основные свойства опеределенного интеграла:

1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$; 2) $\int_a^a f(x)dx = 0$; 3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

4) $\int_a^b (\alpha f(x)dx \pm \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \pm \beta \int_a^b g(x)dx$;

5) если $m \le f(x) \le M$ на $[a,b]$, то $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$.

Определенный интеграл с неопределенным связывает формула Ньютона–Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. (5.2).

Пример. Работающее предприятие начало сброс сточных вод в реку со скоростью $R(t) = 300\,t^2 + 3t$ литров в день, где t – количество дней, отсчитываемых от начала сброса.. а) Каков объем сточных вод, сброшенных в реку между пятым и десятым днем включительно? б) Предполагая, что в момент времени t_0 сточные воды не сбрасывались в реку, найти общий объем сточных вод, сброшенных в реку в течение первых пяти дней.

Решение. *Пусть* V(t)– *объем сточных вод, сброшенных в реку за время* t.

Поскольку $R(t)=dV(t)/dt$, то

а) общий объем сточных вод, сброшенных за период времени с t_1 до t_2 равен

$V(t_2) - V(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} R(t)dt$, при $t_1 = 5$ и $t_2 = 10$ получаем

$$\int_5^{10} (300\,t^2 + 3t)dt = \left(\frac{300t^3}{3} + \frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_5^{10} = 87612{,}5 \text{ (литров)}.$$

б) **общий** объем сточных вод, сброшенных за время t_0 равен $V(t_0)=V(t_0)-V(0)=\int\limits_0^{t_0} R(t)dt$ ($V(0)=0$). При $t_o=5$ имеем

$$\int\limits_0^5 R(t)dt=\int\limits_0^5 (300\,t^2+3t)dt=\left(\frac{300\,t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}\right)\Bigg|_0^5=12537{,}5 \text{ (литров).}$$

Тема 6. Несобственные интегралы.

Определение несобственного интеграла I рода. Определение несобственного интеграла II рода.

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами (I рода); 2) интегралы от неограниченных функций (II рода).

Несобственный интеграл I рода от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл I рода называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности, – расходящимся.

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка $[a,b]$ и непрерывна при $a\le x<c$ и $c<x\le b$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to0}\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx+\lim_{\beta\to0}\int\limits_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл II рода $\int\limits_a^b f(x)dx$ (где $f(c\pm0)=\infty, a\le c\le b$) называется сходящимся, если существуют оба предела в правой части равенства, и расходящимися, если не существует хотя бы один из них.

Пример. Предположим, что через t минут после взрыва токсическое вещество распространяется в атмосфере со скоростью $r(t)=\dfrac{1000}{(1+0{,}16t)^2}$ граммов в час. Какая масса вещества окончательно рассеется в атмосферу?

Решение. Пусть $A(t)$ – масса токсического вещества, распространяющегося за время t. Так как $r(t)=dA/dt$, то общая масса вещества, распространяющаяся за время t_0, равна $A(t_0)=A(t_0)-A(0)=\int\limits_0^{t_0} r(t)dt$ ($A(0)=0$).

Для решения поставленной задачи вычислим $A(\infty)$, или

$$\int_0^{\infty} r(t)dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1000}{(1+0{,}16t)^2}dt = 1000\lim_{b\to\infty}\frac{-1/0{,}16}{1+0{,}16t}\bigg|_0^b =$$

$$= 1000\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{0{,}16(1+0{,}16t)} - \left(\frac{-1}{0{,}16}\right)\right] = 1000\left(0+\frac{1}{0{,}16}\right) = 6250 \text{ граммов.}$$

Тема 7. Функция нескольких переменных.

Понятие функции двух независимых переменных. Частные производные. Полный дифференциал.

Величина U называется функцией нескольких независимых переменных *(x,y,z,...)*, если каждой совокупности значений этих переменных ставится в соответствие определенное значение U^*.

Если переменная является функцией от двух переменных x и y, то функциональную зависимость обозначают *z=f(x,y)*.

Частной производной от функции *z=f(x,y)* по независимой переменной *x* называется конечный предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y), \tag{7.1}$$

вычисленный при постоянном y. Частная производная $f'_y(x,y)$ вычисляется аналогично. Для частных производных справедливы обычные правила и формулы дифференцирования.

Полным приращением функции *z=f(x,y)* в точке *M(x,y)* называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$, где Δx и Δy – произвольные приращения аргументов.

Функция *z=f(x,y)* называется дифференцируемой в точке *(x,y)*, если в этой точке полное приращение можно представить в виде

$\Delta z = (A\Delta x + B\Delta y) + (\alpha\cdot\Delta x + \beta\cdot\Delta y)$, где $\alpha\to 0,\ \beta\to 0$.

Полным дифференциалом функции *z=f(x,y)* называется главная линейная часть $A\Delta x + B\Delta y$ полного приращения Δz. Полный дифференциал функции *z=f(x,y)* вычисляется по формуле $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Пример. Индекс загрязнения I некоторого водоема определен по формуле $I(x,y) = \ln x + \ln y + 3xy$, где x – масса очистителей (в миллиграммах), y – масса металлических солей (в миллиграммах) в стандартном образце. Найти $I_x(1;2)$, $I_y(1;2)$ и пояснить значение этих величин.

Решение. Из формулы (7.1) получаем

$$I_x(1;2) = \frac{\partial I}{\partial x}(1;2) = \frac{\partial}{\partial x}(\ln x + \ln y + 3xy)\big|_{(1;2)} = \left(\frac{1}{x} + 3y\right)\bigg|_{(1;2)} = 7.$$

$I_x(1;2)$ – увеличение загрязнения под воздействием очистителей при x=1, y=2 составляет 7 мг загрязняющих веществ на 1 мг очистителей.

Аналогично,

$$I_y(1;2)=\frac{\partial I}{\partial y}(1;2)=\frac{\partial}{\partial y}(\ln x+\ln y+3xy)\Big|_{(1;2)}=\left(\frac{1}{y}+3x\right)\Bigg|_{(1;2)}=3{,}5.$$

Эта величина означает, что увеличение загрязнения под воздействием металлических солей при x=1, y=2 составляет 3,5 мг загрязняющих веществ на 1 мг металлических солей.

Тема 8. Дифференциальные уравнения.

Понятие дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Дифференциальным уравнением (д.у.) называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называется обыкновенным; если же независимых переменных две или больше, то уравнение называется д.у. в частных производных. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком д.у.

Функция, удовлетворяющая д.у., называется решением этого уравнения. Общим решением д.у. называется формула, содержащая произвольную константу C, из которой подстановкой численных значений C могут быть получены все решения д.у. Такое решение, полученное из общего решения подстановкой числа C, называется частным решением д.у.

Д.у. вида $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ называется д.у. с разделяющимися переменными. Чтобы решить его, нужно сначала разделить переменные в нем, а затем проинтегрировать обе части полученного равенства.

Уравнение вида $y'+P(x)y=Q(x)$ называется линейным. Если $Q(x)\neq 0$, то уравнение называется неоднородным, а если $Q(x)=0$ – линейным однородным. Общее решение однородного уравнения $y'+P(x)y=0$ получается разделением переменных: $y=Ce^{-\int P(x)dx}$, где C – произвольная константа.

Общее решение линейного неоднородного уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения методом Лагранжа, полагая $y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$. Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$.

Пример. Заповедник дикой природы имеет достаточно территорий, чтобы разместить для гнездования 330 журавлей. Предположим, что в заповедник сначала завезли 30 журавлей и через 24 месяца уже насчитывалось 66 журавлей. Предположив, что скорость увеличения численности журавлей пропорциональна как численности журавлей, так и разности между этой численностью и наибольшим ее значением, найти выражение для численности журавлей в заповеднике через t месяцев после первоначального завоза журавлей.

Решение. Пусть Q обозначает неизвестную численность журавлей, dQ/dt – скорость ее изменения. Поскольку 330 – максимальное значение для Q, то Q должно удовлетворять следующему уравнению $dQ/dt=kQ(330-Q)$, где k – коэффициент пропорциональности.

Разделим переменные в этом уравнении и проинтегрируем обе части равенства; выразим Q из полученного соотношения:

$$Q=\frac{330}{1+Ce^{-330kt}},\ (C\text{ – константа}). \qquad (*)$$

Найдем k и C. Так как по условию $Q=30$ при $t=0$, подставляя эти значения в (*), получим $C=10$ и

$$Q=\frac{330}{1+10e^{-330kt}} \qquad (**)$$

Чтобы найти k, используем тот факт, что $Q=66$ при $t=24$, тогда, подставляя эти значения в (**), имеем $k=0,0001157$.

Таким образом, искомое выражение для численности журавлей имеет вид

$$Q=\frac{330}{1+10e^{-0,03818t}}.$$

Тема 9. Элементы теории вероятностей.

Случайное событие, его частота и вероятность. Пространство элементарных событий. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий.

Под событием понимается такой результат эксперимента или наблюдения, который при реализации данного комплекса условий может произойти или не произойти. Событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A и B, называется суммой событий ($A\cup B$). Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, называется произведением событий ($A\cap B$). Совокупность элементарных событий Ω называется пространством элементарных событий.

Вероятностью события A называют отношение числа m исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех исходов: $P(A)=m/n$. Очевидно, что $0\le P(A)\le 1$, $P(Ш)=0$, $P(\Omega)=1$. Кроме того, $P(A)=1-P(\bar{A})$.

Теорема сложения вероятностей: вероятность суммы двух событий A и B равна $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Вероятность события A при условии события B можно записать в виде $P(A|B)=P(A)$. Теорема умножения вероятностей: вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одной из них на условную вероятность другой, вычисленную при условии, что первое имело место, $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$ или $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$. События A и B называются независимыми, если $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Пример. **Вода из реки,** проходящая устройство фильтрации, **классифицируется как загрязненная,** если она имеет 1) недопустимое процентное **содержание опасных органических** веществ, либо 2) недопустимое процентное **содержание опасных неорганических** веществ; в противном случае, вода **классифицируется как незагрязненная.** Исследование записей устройства показало, **что 27% воды,** входящей в устройство, загрязнено органическими веществами, 45% – **неорганическими** веществами, а 23% – органическими и неорганическими **веществами.** **Найти** вероятность того, что вода из рассматриваемой реки является **незагрязненной.**

Решение. Пусть событие A – вода в реке содержит вредные органические вещества, а B – вредные неорганические вещества. Поэтому $P(A)=0{,}27$, $P(B)=0{,}45$, $P(A\cap B)=0{,}23$. Событие $A\cup B$ означает, что вода в реке загрязнена, а вероятность этого события $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0{,}27+0{,}45-0{,}23=0{,}49$. Противоположное событие $\overline{A\cup B}$ означает, что вода в реке незагрязнена, а вероятность его $P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-0{,}49=0{,}51$. Другими словами, 51% всей воды в реке незагрязнено.

Тема 10. Элементы математической статистики.

Генеральная и выборочная совокупности. Объем совокупности. Частота и относительная частота. Статистическое распределение. Выборочное среднее. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение. Нормированное отклонение. Коэффициент вариации.

Выборочной совокупностью называется совокупность случайно отобранных однородных объектов. Генеральной совокупностью называется совокупность всех однородных объектов, из которых производится выборка. Объемом n совокупности называется число объектов этой совокупности.

Величины n_i (число появлений значения x_i), $i=1,\ldots,l$, называются частотами соответствующих значений x_i случайной величины X. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{l} n_i = n$.

Таблица, устанавливающая соответствие между значениями случайной величины X (соответственно в $1,2,\ldots,n$–м испытаниях) $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и их относительными частотами $w_i = n_i / n$, называется статистическим рядом случайной величины X.

Пусть случайная величина X задана статистическим рядом. Средним значением (выборочным средним) случайной величины X называется выражение

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{l} w_i x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l} n_i x_i. \qquad (10.1)$$

Выборочной дисперсией случайной величины X называется выражение

$$D(X) = \sum_{i=1}^{l} w_i (x_i - \bar{x})^2 /(n-1). \qquad (10.2)$$

Среднее квадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D(X)}$. (10.3)

Нормированное отклонение представляет отношение отклонения отдельных вариант x_i от их среднего значения $\bar{x}$ к среднему отклонению, т.е. $N_{oi} = (x_i - \bar{x})/\sigma$. Коэффициент вариации выражает изменчивость признака в процентах и равен

$$\bar{U} = 100\sigma/\bar{x} \qquad (10.4)$$

Экологами собираются данные по распределению вредных веществ (в атмосферном воздухе, почве, воде, растениях, донных отложениях) и вычисляются показатели вариации, которые являются критериями оценки экологического состояния территории исследований. Если показатели вариации ($D(x)$, σ, N_{oi}, $\bar{U}$) характеризуются небольшими значениями, то экологическое состояние хорошее.

Пример. Пусть содержание ртути в почве одного из заводов представлено в виде статистического ряда

содержание x_i (мг/кг)	111	112	113	114	115	116	117	118	119
частота n_i	3	9	31	71	82	46	19	5	1

Можно ли считать распределение вредных веществ в почвах завода нормальным?

Решение. Вычислим по формулам (10.1)–(10.4) показатели вариации. При n=267, имеем $\bar{x}$=112,5 (мг/кг), $D(x)$=6,88, σ=2,62, $\bar{U}$=2,33% Так как $\bar{U}$= 2,33 мало то распределение вредных веществ в почвах завода можно считать нормальным.