Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского
Серия «Экономика». Том 20 (59). 2007 г. № 1. С. 224-230.

УДК 330

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРИНЦИПАЛ-АГЕНТ В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОГО ТИПА АГЕНТА

Храпко В.Н.

Предложено решение задачи принципал-агент методами оптимального управления, приведен пример.
Ключевые слова: микроэкономика, принципал-агент, асимметрия информации.

Анализ проблемы в общем виде. Классическая микроэкономическая теория и основанная на ней макроэкономика оставляет большое количество вопросов последней без удовлетворительных ответов, в частности, Джордж Акерлоф, в своем докладе по поводу присуждения ему Нобелевской премии в 2001 году, отметил следующие макроэкономические вопросы, не имеющие удовлетворительного объяснения в рамках неоклассической теории:

- Существование «невольной» (involuntary) безработицы
- Рынок акций может существенно и быстро меняться, тогда как обычно предполагается эффективность рынка, когда цена акции равна его экономической стоимости, медленно меняющейся во времени

Одним из важных факторов, влияющий на описанные ситуации является неравномерность (асимметрия) информации, которая распределена между участниками рынка, например, между принципалом и агентом.

Анализ последних достижений и публикаций. На русском языке материал, близкий данной работе опубликован в [1], гл. 2, 3, с библиографией. Имеется также и краткий конспект лекций по теории контрактов Сергея Гуриева (Российская экономическая школа) [2], в работе B. Solani [4] и можно найти дополнительный материал (см. также соответствующий материал в [3]). Вышеперечисленных работах рассмотрены основные задачи теории контрактов, связанные с асимметрией информации на рынке.

Выявление нерешенных частей общей проблемы. В отличие от работы B. Solani[4] и, соответственно, С. Гурьева [2], в данной статье используется другой подход к решению задачи оптимизации решения принципала, основанный на методах оптимального управления.

Связь с важными научными и практическими задачами. Ниже приведены некоторые примеры рынков, где ситуация с асимметрией информации на рынке часто встречается.

- Рынок страхования: индивид лучше знает о состоянии своего здоровья, чем страховая компания
- Рынок труда; работник лучше знает свою квалификацию и производительность, чем наниматель

- Научные исследования: научный работник лучше знает возможные результаты исследования, чем заказчик этих исследований
- Рынок займов: заемщик лучше знает свою возможность выплатить свой долг, чем кредитор
- Рынок подержанных автомобилей: продавец лучше знает качество продаваемых автомобилей, чем покупатель

Во всех предыдущих случаях информация известна по-разному для участников сделки. В случае рынка страхования и рынка труда можно говорить о типе агента, который описывает информацию, необходимую для принятия решения принципалом. Например, способности у наемных работников разные (типы разные), неточная информация может привести к неверному принятию решения принципалом.

Цель работы сформулировать и решить задачу «принципал-агент» в общем виде при условии асимметрии информации на рынке.

Формулировка задачи. Одним из подходов включения таких ситуаций в теоретические рассмотрения являются следующее обобщение классического подхода, принятого в микроэкономике (см. [3]).

Считается, что один из контрагентов в сделке на перечисленных выше рынках является агентом, а другой, имеющий большую рыночную силу, принципалом. Далее, принципал может выдвигать определенные условия, например, в виде контрактов. В свою очередь агенты имеют разные типы, и, следовательно, по-разному реагируют на предложения принципала.

Взаимодействие между принципалом и агентом, с одной стороны, является информационным, а, с другой стороны, экономическим. Принципал, используя, полученную информацию, решает, как вознаградить агента. Мы предполагаем, что агент ведет себя рационально и старается получить максимальное вознаграждение. Упрощая ситуацию, мы считаем, что каждый агент имеет свой тип x. Этот тип он не может менять, но может сообщить принципалу, что у него некоторый тип y. Отсюда следует, что функция полезности агента зависит от двух параметров x и y, т. е. имеет вид $U(x, y, ...)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что x и y являются числами в некотором диапазоне, скажем, от a до b.

Таким образом, сообщением принципалу является тип y, который сообщает ему агент. Зная эту информацию y, принципал дает агенту вознаграждение в виде блага $q(y)$. Агент имеет функцию полезности, определенную конкретным типом x, эту функцию полезности он изменить не может,

Из соображений рациональности, агент посылает такое сообщение €, которое максимизирует его полезность $U(x, q(€))$. Теперь предположим, что агент хочет выдать себя за другой тип, и максимизирует функцию полезности вида $U(y, ...)$, а не вида $U(x, ...)$.

Тогда его новое сообщение $\bar{y}$, максимизирующее $U(y,...)$, будет отличаться от прежнего правильного $\hat{y}$, которое максимизирует полезность $U(x,...)$. При этом, очевидно, будет выполнено соотношение $U(x,q(\bar{y})) < U(x,q(\hat{y}))$, так как $\bar{y}$ не дает максимум $U(x,...)$. Агент получает заведомо более низкое вознаграждение. Поэтому, если принципал знает функцию полезности агента, то при условии рационального выбора, агент не сможет скрыть свой тип от принципала. Это свойство называется принципом раскрытия информации.

Формально такое свойство функции полезности агента можно выразить так:

$$U(x,y) \le U(x,x), \quad x \ne y \tag{1}$$

Это свойство имеет название «свойство (или условие) принуждения (IC, incentive condition)» ***Моделирование поведения агента*** (ср.([4]).

Мы будем предполагать, что контракт определяется парой (q,t), где q - количество блага, определяемое принципалом на основе объявленного типа y, и t - денежный трансфер, который агент обязан заплатить принципалу за количество блага q.

В классической постановке трансфер t может назначаться независимо от количества блага и может зависеть только от объявленного типа y. Функция полезности агента сепарабельна и состоит из двух частей: одна часть, соответствующая благу q, которую мы обозначим $u(x,q(y))$, здесь x - настоящий тип агента, y - объявляемый агентом тип, и второй части - части соответствующей трансферу: $D(t(y))$. В таком случае общий вид функции полезности агента будет таким:

$$U(x,y) = u(x,q(y)) - D(t(y)) \tag{2}$$

Целью агента является максимизация своей функции полезности, т. е. определение такого типа $\hat{y}$, чтобы он доставлял максимум функции полезности $U(x,y)$ с фиксированным настоящим типом x. Часто, вместо $D(t(y))$ рассматривают просто $t(y)$, что означает что неполезость (disutility) трансфера $D \circ t(y)$ равна трансферу t.

Найдем необходимое условие для определения требования (1), которому должна подчиняться функция полезности агента.

Рассмотрим (1) и представим y в виде $y = x + h$, где h небольшая положительная величина или возмущение. Тогда неравенство (1) примет вид:

$$U(x,x) \ge U(x,y) = U(x,x+h)$$

или

$$u(x,q(x)) - t(x) \ge u(x,q(x+h)) - t(x+h)$$

или

$$t(x+h)-t(x) \geq u(x, q(x+h)) - u(x, q(x))$$

Деля на h и переходя к пределу $h \to +0$, получим соотношение для правой производной:

$$t'(x) \geq u'_q q'(x)$$

Аналогично имеем и для левой производной, когда h меньше нуля.

$$t'(x) \leq u'_q q'(x)$$

В случае существования обеих производных имеем следующее условие, см. [4]

$$t'(x) = u'_q q'(x) \text{ (IC1)} \tag{3}$$

Необходимое условие экстремума первого порядка при фиксированном x является равенство, эквивалентное (3):

$$\left.\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\right|_{y=x} = 0 \tag{4}$$

Из условия (1) следует, что это равенство (4) должно выполнятся при равенстве двух аргументов между собой: $x = y$. Равенства (3) или (4) дают необходимые условия существования экстремума для агента, т.е. удовлетворяют требованиям агента.

При условии существования вторых производных у функции $U(x, y)$, можно получить достаточные условия максимума функции $U(x, y)$, которое будет иметь следующий вид: $\left.U''_{yy}(x,y)\right|_{x=y} \leq 0$:

$$U''_{yy}(x,y) = (u'_q q'_y)'_y - t''_{yy} = u''_{qq} q'_y + u'_q q''_{yy} - t''_{yy} \leq 0 \tag{5}$$

В связи с тем, что как q так и t зависят от одного типа, а для значений, доставляющих максимум выполняется (3) (как аналитическая форма требования(1)), следовательно, мы можем воспользоваться этим условием и уточнить (5), зная, что при $x = y$ выполняется:

$$q(x) = q(y),\ t(x) = t(y), q'_x = q'_y, t'_x = t'_y, t''_{yy} = t''_{xx}$$

Найдем полную производную от левой от правой частей равенства (3): $t''_{xx} = u''_{qx} q'_x + u''_{qq} q''_{xx} + u'_q q''_{xx}$ и подставим ее вместо t''_{yy}, так как выполняется $t''_{yy} = t''_{xx}$. Тогда мы получим неравенство:

$$u''_{qx} q'_x \geq 0 \quad \text{(IC2)} \tag{6}$$

Это неравенство и равенство (3) вместе представляют собой условие IC.

Решение задачи оптимизации для принципала

Функция полезности $W(t,q)$ для принципала состоит из положительной части, определяемой получаемым от агента трансфера t, и функции затрат принципала (затраты на производство блага q) $C(q)$, $W(t,q)=t(x)-C(q(x))$. Нужно найти максимум этой функции при выполнении условий IC для агента.

Как это требуется, функция полезности агента должна удовлетворять условию (1), следовательно, принципал может считать, что агент раскрывает свой тип и его функция полезности зависит только типа этого агента x, $U(x,x)=U(x)=u(x,q(x))-t(x)$.

Полная производная $U(x)$ по x равна:

$$U'(x)=u'_x+u'_q q'-t'$$

Используя условие (3) $u'_q q'-t'=0$, имеем:

$$U'(x)=u'_x(x,q(x)) \tag{7}$$

или

$$U(x)=\int_a^x U'(z)dz=\int_a^x u'(z)dz$$

Мы предполагаем, что принципалу известна плотность распределения $\pi(x)$ типа x в популяции агентов, поэтому мы ставим задачу для принципала как задачу максимума усредненного значения функции полезности принципала:

$$\overline{W}(q,t)=\int_a^b W(q(x))p(x)dx=\int_a^b (t(x)-C(q(x)))\pi(x)dx \tag{8}$$

Такой подход часто используется для описания ситуации, когда известно только распределение.(см.. например, [3].). В выражении (8) предполагается, что мы ищем максимум этого выражения изменяя количество блага q и трансфер t. Кроме этого необходимо, чтобы при таких изменениях (q,t) выполнялось условие первого порядка для агента IC1 (3): $t'=u'_q q'$.

Обозначим через $v(x)$ предельный трансфер $t'(x)$, тогда вместо одного условия IC1 получим условие в виде двух дифференциальных уравнений, зависящих от неизвестной функции управления $v(x)$:

$$t'=v(x) \tag{9}$$

$$q'=\frac{v(x)}{u'_q(x,q(x))}$$

При таком подходе, отличном от [4], принципал меняет $v(\cdot)$ для поиска оптимального решения в (8). Изменение $v(x)$ влечет изменение и трансфера $t(x)$ и блага $q(x)$.

Таким образом, окончательно получаем задачу оптимального управления:

Найти максимум по $v(x)$ функционала

$$W(v(\cdot)) = \int_a^b \left(t(x) - C(q(x))\right)\pi dx$$

при следующих дифференциальных ограничениях:

$$t' = v(x)$$

$$q' = \frac{v(x)}{u'_q(x, q(x))}$$

Найдем необходимые условия экстремума функционала (8) при ограничениях (9).

Функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x,t(\cdot),q(\cdot),v(\cdot)) = (t(x) - C(q(x)))\pi(x) + p_1(x)(t'(x) - v(x)) + p_2(x)\left(t'(x) - \frac{v(x)}{u'_q(x,q(x))q'(x)}\right)$$

Уравнения Эйлера таковы:

$$p_1' = \pi \tag{10}$$

$$p_2' = vp_2 \frac{u''_{qq}}{(u'_q)^2} + C'_q \pi$$

Условия оптимальности по управлению v:

$$-p_1 u'_q = p_2 \tag{11}$$

Из первого уравнения (10) следует, что $p_1(x)$ - функция распределения вероятностей, для которого плотность распределения типа x в популяции равна $\pi(x)$. Первое уравнение в (9) и первое уравнение в (10) интегрируются в замкнутом виде. Два вторых дифференциальных уравнения и служат для определения q, p_2, причем управление v во втором уравнении (10) должно быть выбрано таким образом, чтобы выполнилось соотношение (11), зависящее и от q. Второе уравнение относительно «теневой цены» p_2 также может быть решено в квадратурах.

Приведем пример непрерывного типа при наличии асимметрии информации на рынке ссудного капитала

Пример. Заемщик (агент) имеет тип, характеризующий его возможность погасить долг – соответствующий рейтинг. Более точно, можно использовать линейную комбинацию коэффициента ликвидности, коэффициент доходности и коэффициента оборота (например, Z-критерий Альтмана). Он дает числовую характеристику финансовой надежности заемщика. Принципал, в данном случае Банк, выбирает такое количество ссужаемых денег q и такой процент в виде оплаты за ссуду t, чтобы обеспечить наилучшее решение своих проблем с учетом пожеланий агента.

Выводы. Информационные проблемы на рынке хорошо известны. В некоторых случаях такая ситуация приводит к неправильному или неожиданному виду функционирования рынка, например, если представить себе экономику с золотыми монетами в качестве платежного средства. Некоторые владельцы монет могут слегка «сбрить» их, т. е. уменьшить количество золота в них, так, что можно определить такую монету только используя особые весы. В таком случае легковесные «сбритые» монеты постепенно вытеснят полновесные.

В данной работе методами теории управления найдены необходимые условия решения задачи принципал-агент, когда вся информация о типе агента сосредоточена в числовом параметре. Предложенное решения при определенных ограничениях позволяет решить задача как для принципала так и для агента.

Список литературы

1. Тироль Ж. Рынки и рыночная власть: теория организации промышленности: В 2 т.: Пер. с англ. / Ж. Тироль; Под ред. В.М. Гальперина, Н.А. Зенкевич; Ин-т "Открытое о-во". 2-е изд., испр. СПб.: Экон. шк., 2000. 2 т. (Б-ка "Экон. шк."; Вып. 31) Т 1. стр. XLI, 325
2. Гуриев С. Теория контрактов, курс лекций, Российская экономическая школа, 2002,, с. 36
3. David Kreps, A Course in Microeconomic theory, New York and London, Harvester Wheatsheaf, 1990, pp. 850
4. Bernard Solani, Theorie des contracts, Economica, 1994, pp. 141
5. Алексеев И. М., и др. Оптимальное управление, М. Наука. 1979, - 432 с.

Поступила в редакцию 29.05.2007 г.

Храпко В.Н. **Розв'язання задачі принципал-агент у випадку нерозривного типу агента** // Вчені записки ТНУ. Серія: Економіка, 2007. – Т. 20 (59). – № 1. – С. 224-230.
Запропоновано розв'язання задачі принципал-агент методами оптимального керування, наведено приклад.
Ключові слова: мікроекономіка, принципал-агент, асиметрія інформації.

Khrapko V.N. **Principal-agent problem solution using optimal control approach** // Uchenye zapiski TNU. Series: Economy, 2007. – Vol. 20 (59). # 1. – P. 224-230.
The Principal-agent problem solution was proposed, example was given.
Key words: microeconomics, principal-agent, asymmetry information.